

**Escola de Engenharia da UFMG**  
**Departamento de Engenharia de Produção**  
**Otimização Combinatória**  
**Modelos para Sistemas Eixo e Raio**  
**Modelos para Problemas Quadráticos de Atribuição**  
**Modelos para Desenho de Redes Congestionadas**

Gilberto de Miranda Junior  
Ricardo Saraiva de Camargo  
Henrique Pacca L. Luna

# Sumário

# Sumário

- Sistemas Eixo e Raio.
- Problemas Quadráticos de Atribuição.
- Desenho de Redes Congestionadas.

Sumário

● Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

Classificação

Modelos de Atribuição Múltipla

Problemas de Atribuição  
Quadráticos

O Problema

Linearizando o PQA

Experiência Computacional

Desenho de Redes  
Congestionadas

O Problema

Modelo

# Sistemas Eixo e Raio

# Sistemas Eixo e Raio

- O Problema.
- Classificação.
- Modelos.

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

● Sistemas Eixo e Raio

O Problema

Classificação

Modelos de Atribuição Múltipla

Problemas de Atribuição  
Quadráticos

O Problema

Linearizando o PQA

Experiência Computacional

Desenho de Redes  
Congestionadas

O Problema

Modelo

# O Problema

# Introdução

- O’Kelly - transporte aéreo americano

- Hub:  
centralizador, comutador

consolidação de carga

cross-docking

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

● **Introdução**

● Motivação

● Aplicações

● Exemplo

● Exemplo (continuação)

Classificação

Modelos de Atribuição Múltipla

Problemas de Atribuição  
Quadráticos

O Problema

Linearizando o PQA

Experiência Computacional

Desenho de Redes  
Congestionadas

O Problema

Modelo

# Motivação

- Compartilhamento do meio de transporte
- Aproveitar os efeitos de escala no transporte
- Desconto ao se ter grandes volumes de fluxo

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

- Introdução
- **Motivação**
- Aplicações
- Exemplo
- Exemplo (continuação)

Classificação

Modelos de Atribuição Múltipla

Problemas de Atribuição  
Quadráticos

O Problema

Linearizando o PQA

Experiência Computacional

Desenho de Redes  
Congestionadas

O Problema

Modelo

# Aplicações

- Transporte aéreo
- Telecomunicações  
backbones  
redes hierárquicas
- Transporte de carga
- Transporte coletivo urbano
- Correios e sistemas postais

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

- Introdução
- Motivação
- Aplicações
- Exemplo
- Exemplo (continuação)

Classificação

Modelos de Atribuição Múltipla

Problemas de Atribuição  
Quadráticos

O Problema

Linearizando o PQA

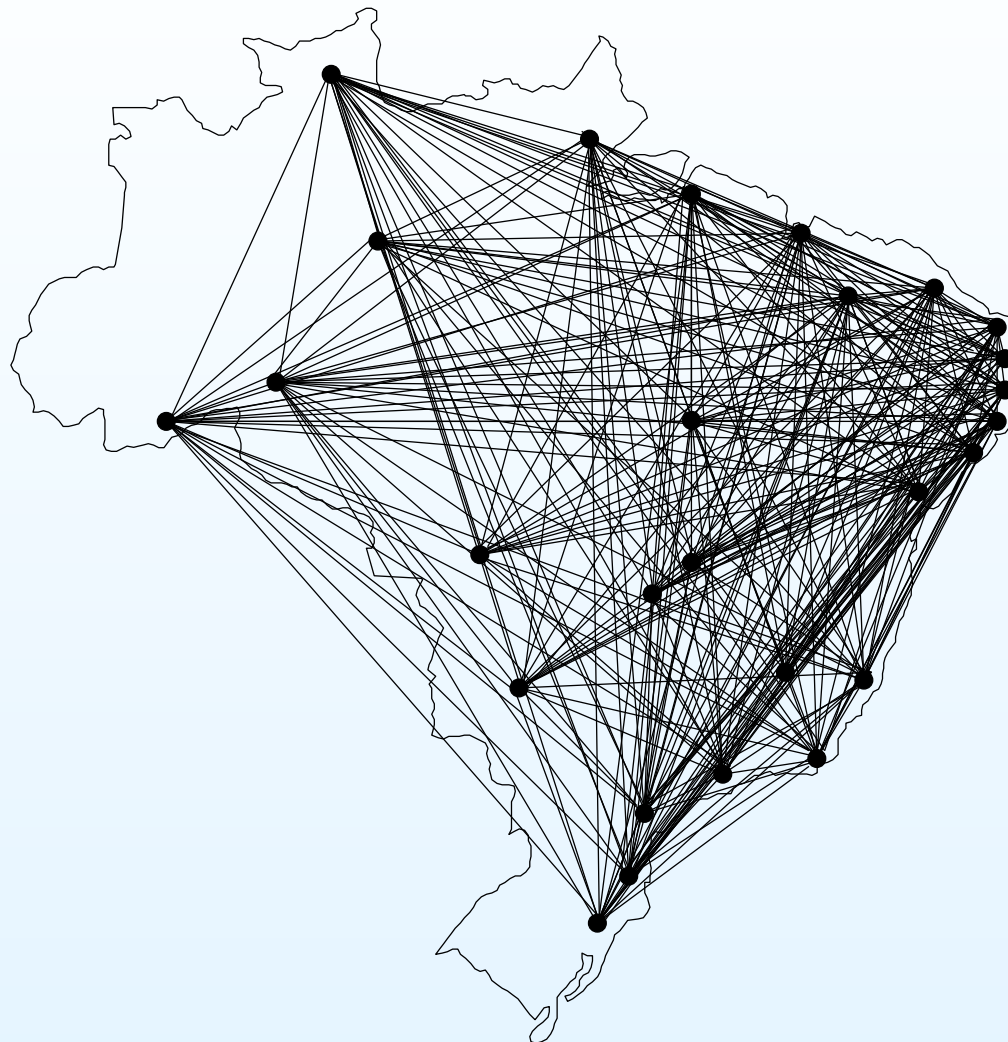
Experiência Computacional

Desenho de Redes  
Congestionadas

O Problema

Modelo

# Exemplo



Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

- Introdução
- Motivação
- Aplicações
- Exemplo
- Exemplo (continuação)

Classificação

Modelos de Atribuição Múltipla

Problemas de Atribuição  
Quadráticos

O Problema

Linearizando o PQA

Experiência Computacional

Desenho de Redes  
Congestionadas

O Problema

Modelo

# Exemplo (continuação)

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

- Introdução
- Motivação
- Aplicações
- Exemplo
- Exemplo (continuação)

Classificação

Modelos de Atribuição Múltipla

Problemas de Atribuição  
Quadráticos

O Problema

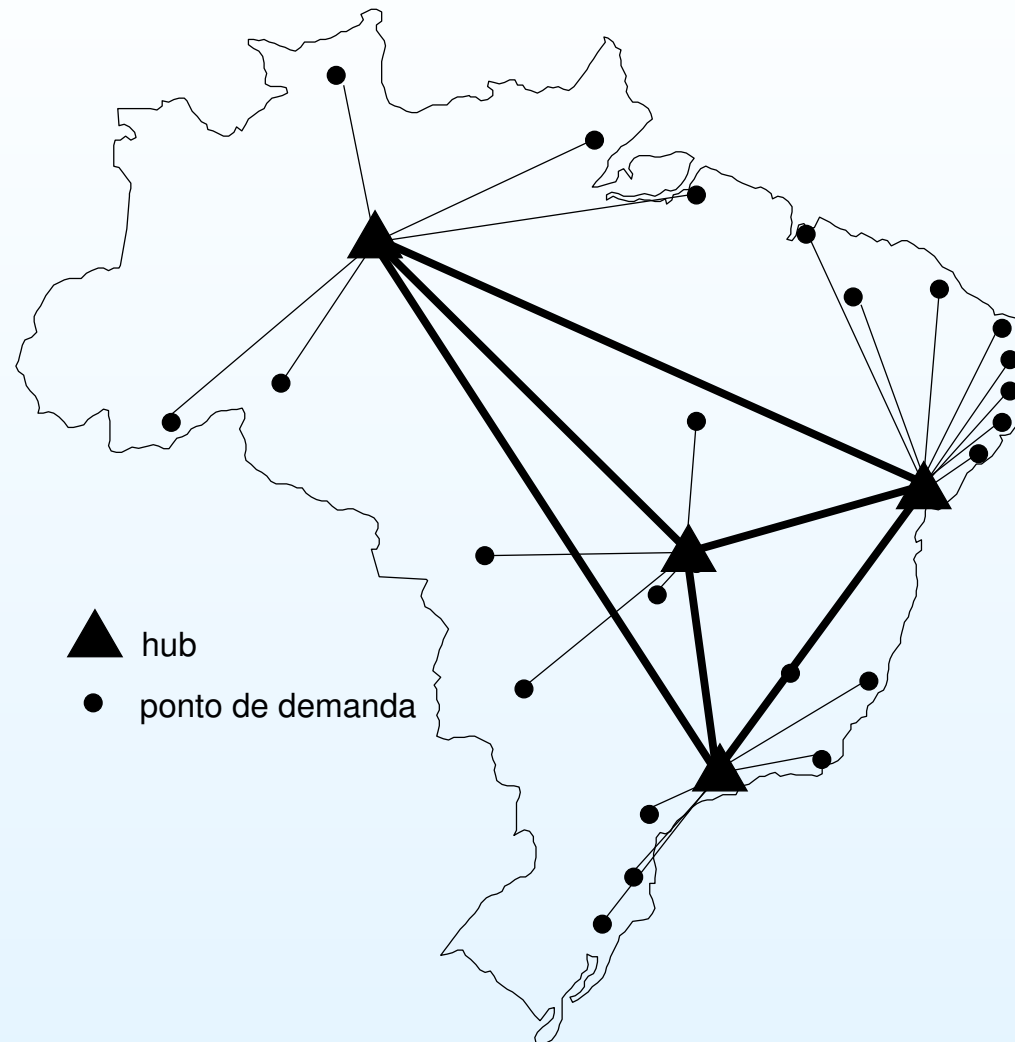
Linearizando o PQA

Experiência Computacional

Desenho de Redes  
Congestionadas

O Problema

Modelo



# Classificação

# Classificação

- Protocolos de O'Kelly  
Atribuição Simples  
Atribuição Múltipla

- Taxonomia de Hamacher e Nickel

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

Classificação

● Classificação

- Atribuição Simples (A-B)
- Atribuição Simples (C-D)
- Atribuição Múltipla (E-F)
- Atribuição Múltipla (G-H)
- Taxonomia

Modelos de Atribuição Múltipla

Problemas de Atribuição  
Quadráticos

O Problema

Linearizando o PQA

Experiência Computacional

Desenho de Redes  
Congestionadas

O Problema

Modelo

# Atribuição Simples (A-B)

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

Classificação

- Classificação
- Atribuição Simples (A-B)
- Atribuição Simples (C-D)
- Atribuição Múltipla (E-F)
- Atribuição Múltipla (G-H)
- Taxonomia

Modelos de Atribuição Múltipla

Problemas de Atribuição  
Quadráticos

O Problema

Linearizando o PQA

Experiência Computacional

Desenho de Redes  
Congestionadas

O Problema

Modelo

## Protocolo A

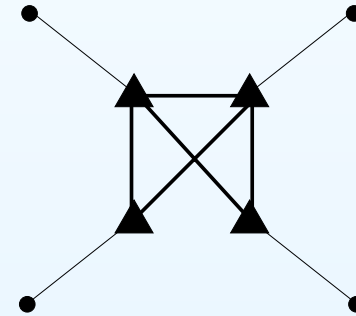
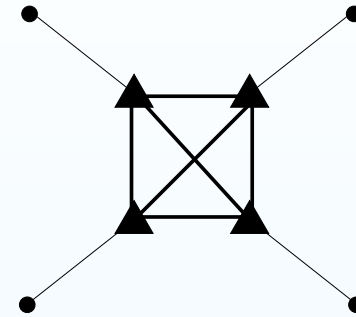
- localização dos hubs
- atribuição simples de nós a hubs

Rockwell

## Protocolo B

- localização dos hubs
- atribuição simples de nós a hubs
- enlaces hub a hub

Enlaces de Satélite



# Atribuição Simples (C-D)

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

Classificação

- Classificação
- Atribuição Simples (A-B)
- Atribuição Simples (C-D)
- Atribuição Múltipla (E-F)
- Atribuição Múltipla (G-H)
- Taxonomia

Modelos de Atribuição Múltipla

Problemas de Atribuição  
Quadráticos

O Problema

Linearizando o PQA

Experiência Computacional

Desenho de Redes  
Congestionadas

O Problema

Modelo

## Protocolo C

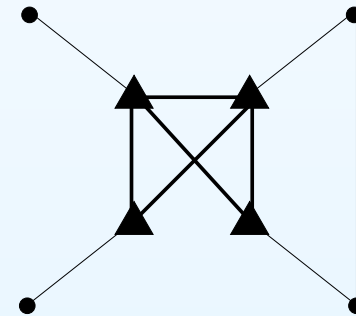
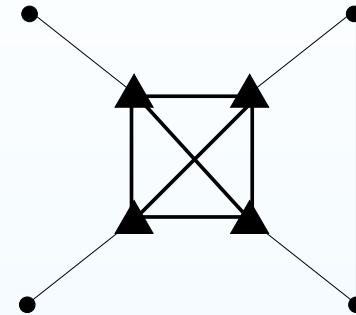
- localização dos hubs
- atribuição simples de nós a hubs
- enlaces nó a nó

Redes de Finanças

## Protocolo D

- localização dos hubs
- atribuição simples de nós a hubs
- enlaces nó a nó
- enlaces hub a hub

Redes de Finanças



# Atribuição Múltipla (E-F)

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

Classificação

- Classificação
- Atribuição Simples (A-B)
- Atribuição Simples (C-D)
- Atribuição Múltipla (E-F)
- Atribuição Múltipla (G-H)
- Taxonomia

Modelos de Atribuição Múltipla

Problemas de Atribuição  
Quadráticos

O Problema

Linearizando o PQA

Experiência Computacional

Desenho de Redes  
Congestionadas

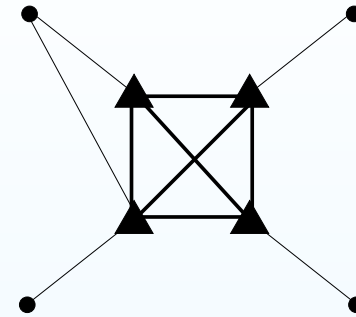
O Problema

Modelo

## Protocolo E

- localização dos hubs
- atribuição múltipla de nós a hubs

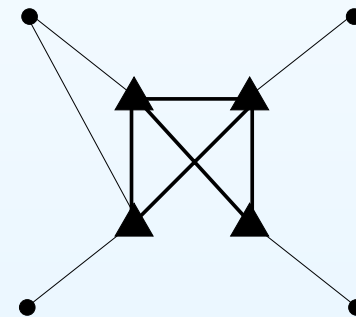
Transporte aéreo de passageiros



## Protocolo F

- localização dos hubs
- atribuição múltipla de nós a hubs
- enlaces hub a hub

Sistema postal



# Atribuição Múltipla (G-H)

## Sumário

## Sistemas Eixo e Raio

## O Problema

## Classificação

- Classificação
- Atribuição Simples (A-B)
- Atribuição Simples (C-D)
- Atribuição Múltipla (E-F)
- Atribuição Múltipla (G-H)
- Taxonomia

## Modelos de Atribuição Múltipla

## Problemas de Atribuição Quadráticos

## O Problema

## Linearizando o PQA

## Experiência Computacional

## Desenho de Redes Congestionadas

## O Problema

## Modelo

## Protocolo G

- localização dos hubs
- atribuição múltipla de nós a hubs

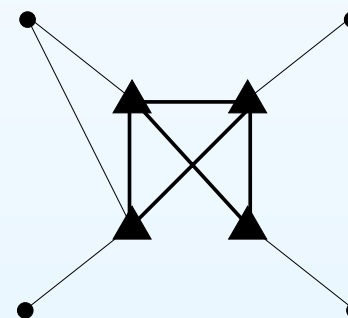
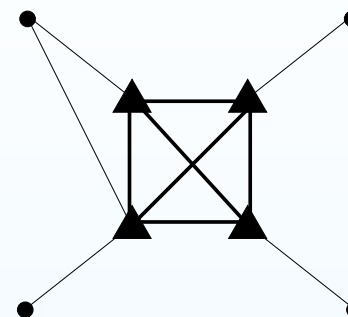
- enlaces nó a nó  
Transporte aéreo

## Protocolo H

- localização dos hubs
- atribuição múltipla de nós a hubs

- enlaces hub a hub

- enlaces nó a nó  
Transporte aéreo



# Taxonomia

$$\alpha/\beta/\gamma/\delta/\eta$$

- $\alpha$  : hub e/ou número de hubs
- $\beta$  : 'D', localização discreta dos hubs
- $\gamma$  : restrições adicionais e variações (MA, SA, CAP)
- $\delta$  : o tipo de interação entre as facilidades, •
- $\eta$  : a função objetivo,  $\sum_{\text{fluxo}}$  e  $\sum_{\text{hubs}}$

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

Classificação

- Classificação
- Atribuição Simples (A-B)
- Atribuição Simples (C-D)
- Atribuição Múltipla (E-F)
- Atribuição Múltipla (G-H)
- Taxonomia

Modelos de Atribuição Múltipla

Problemas de Atribuição  
Quadráticos

O Problema

Linearizando o PQA

Experiência Computacional

Desenho de Redes  
Congestionadas

O Problema

Modelo

# Modelos de Atribuição Múltipla

# Modelos de Atribuição Múltipla

- O'Kelly
- Campbell
- Klincewicz
- Ernst e Krishnamoorthy
- Skorin kapov *et al*
- Hamacher *et al*

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

Classificação

Modelos de Atribuição Múltipla

● Modelos de Atribuição Múltipla

● Parâmetro Custo

● O'Kelly

● Campbell

● Klincewicz

● Ernst e Krishnamoorthy

● Skorin Kapov et al

● Hamacher et al

● Comparação: CAB10 - CPU (S)

● Comparação: CAB25 GAP (%)

● Comparação: CAB20 Nós B&B

Problemas de Atribuição Quadráticos

O Problema

Linearizando o PQA

Experiência Computacional

Desenho de Redes

# Parâmetro Custo

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

Classificação

Modelos de Atribuição Múltipla

- Modelos de Atribuição Múltipla
- **Parâmetro Custo**
- O'Kelly
- Campbell
- Klinecicz
- Ernst e Krishnamoorthy
- Skorin Kapov et al
- Hamacher et al
- Comparação: CAB10 - CPU (S)
- Comparação: CAB25 GAP (%)
- Comparação: CAB20 Nós B&B

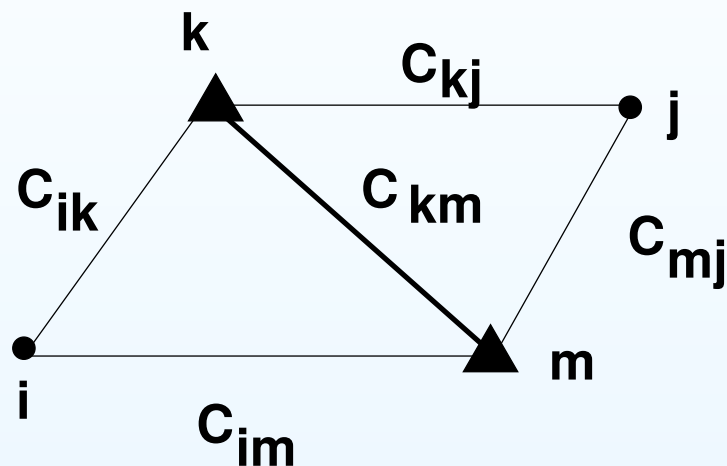
Problemas de Atribuição Quadráticos

O Problema

Linearizando o PQA

Experiência Computacional

$$c_{ijkm} = c_{ij} + \alpha c_{km} + c_{mj}$$



# O'Kelly

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

Classificação

Modelos de Atribuição Múltipla

- Modelos de Atribuição Múltipla
- Parâmetro Custo
- O'Kelly
- Campbell
- Klinecicz
- Ernst e Krishnamoorthy
- Skorin Kapov et al
- Hamacher et al
- Comparação: CAB10 - CPU (S)
- Comparação: CAB25 GAP (%)
- Comparação: CAB20 Nós B&B

Problemas de Atribuição Quadráticos

O Problema

Linearizando o PQA

Experiência Computacional

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_i \sum_j \sum_k \sum_m w_{ij} [c_{ijkm} z_{ik} z_{jm}] \\ \text{sujeito a:} \end{aligned}$$

$$\sum_i z_{ik} \leq (n - p + 1) z_{kk} \quad \forall k \in \mathcal{K}$$

$$\sum_k z_{ik} = 1 \quad \forall i \in \mathcal{N}$$

$$\begin{aligned} \sum_k z_{kk} &= p \\ z_{ik} &\in \{0, 1\} \quad \forall i \in \mathcal{N}, k \in \mathcal{K} \end{aligned}$$

# Campbell

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

Classificação

Modelos de Atribuição Múltipla

- Modelos de Atribuição Múltipla
- Parâmetro Custo
- O'Kelly
- Campbell
- Klinecicz
- Ernst e Krishnamoorthy
- Skorin Kapov et al
- Hamacher et al
- Comparação: CAB10 - CPU (S)
- Comparação: CAB25 GAP (%)
- Comparação: CAB20 Nós B&B

Problemas de Atribuição Quadráticos

O Problema

Linearizando o PQA

Experiência Computacional

$$\min \sum_k a_k y_k + \sum_i \sum_j \sum_k \sum_m c_{ijkm} w_{ij} x_{ijkm}$$

sujeito a:

$$x_{ijkm} \leq y_m$$

$$\forall i, j \in \mathcal{N}, k \in \mathcal{K}$$

$$x_{ijkm} \leq y_k$$

$$\forall i, j \in \mathcal{N}, m \in \mathcal{K}$$

$$\sum_k \sum_m x_{ijkm} = 1$$

$$\forall i, j \in \mathcal{N}$$

$$x_{ijkm} \geq 0$$

$$\forall i, j \in \mathcal{N}, k, m \in \mathcal{K}$$

$$y_k \in \{0, 1\}$$

$$\forall k \in \mathcal{K}$$

# Klincewicz

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

Classificação

Modelos de Atribuição Múltipla

- Modelos de Atribuição Múltipla
- Parâmetro Custo
- O'Kelly
- Campbell
- Klincewicz
- Ernst e Krishnamoorthy
- Skorin Kapov et al
- Hamacher et al
- Comparação: CAB10 - CPU (S)
- Comparação: CAB25 GAP (%)
- Comparação: CAB20 Nós B&B

Problemas de Atribuição Quadráticos

O Problema

Linearizando o PQA

Experiência Computacional

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_h \sum_l c_{hl} x_{hl} + \sum_k a_k y_k \\ \text{sujeito a:} \quad & \sum_l x_{hl} = 1 && \forall h \\ & x_{hl} \leq y_k && \forall h, l \text{ and } k \in H_l \\ & x_{hl} \geq 0 && \forall h, l \\ & y_k \in \{0, 1\} && k \in \mathcal{K} \end{aligned}$$

# Ernst e Krishnamoorthy

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

Classificação

Modelos de Atribuição Múltipla

- Modelos de Atribuição Múltipla
- Parâmetro Custo
- O'Kelly
- Campbell
- Klinecicz
- Ernst e Krishnamoorthy
- Skorin Kapov et al
- Hamacher et al
- Comparação: CAB10 - CPU (S)
- Comparação: CAB25 GAP (%)
- Comparação: CAB20 Nós B&B

Problemas de Atribuição Quadráticos

O Problema

Linearizando o PQA

Experiência Computacional

$$\min \sum_i \left[ \sum_k \mathcal{X} c_{ik} x_k^i + \sum_k \sum_m \alpha c_{km} x_{km}^i + \sum_m \sum_j \delta c_{mj} x_{mj}^i \right] + \sum_k a_k y_k$$

subject to

$$\sum_k x_k^i = \sum_j w_{ij} \quad \forall i \in \mathcal{N}$$

$$\sum_m x_{mj}^i = w_{ij} \quad \forall i, j \in \mathcal{N}$$

$$\sum_m x_{km}^i + \sum_j x_{kj}^i - \sum_m x_{mk}^i - x_k^i = 0 \quad \forall i \in \mathcal{N}, k \in \mathcal{K}$$

$$x_k^i \leq \sum_j w_{ij} y_k \quad \forall i \in \mathcal{N}, k, m \in \mathcal{K}$$

$$x_{mj}^i \leq w_{ij} y_k \quad \forall i, j \in \mathcal{N}, k \in \mathcal{K}$$

$$x_k^i, x_{km}^i, x_{mj}^i \geq 0 \quad \forall i, j \in \mathcal{N}, k, m \in \mathcal{K}$$

$$y_k \in \{0, 1\} \quad k \in \mathcal{K}$$

# Skorin Kapov et al

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

Classificação

Modelos de Atribuição Múltipla

- Modelos de Atribuição Múltipla
- Parâmetro Custo
- O'Kelly
- Campbell
- Klinecicz
- Ernst e Krishnamoorthy
- Skorin Kapov et al
- Hamacher et al
- Comparação: CAB10 - CPU (S)
- Comparação: CAB25 GAP (%)
- Comparação: CAB20 Nós B&B

Problemas de Atribuição Quadráticos

O Problema

Linearizando o PQA

Experiência Computacional

$$\min \sum_k a_k y_k + \sum_i \sum_j \sum_k \sum_m w_{ij} c_{ijkm} x_{ijkm}$$

sujeito a:

$$\sum_k x_{ijkm} \leq y_m \quad \forall i, j \in \mathcal{N}, k \in \mathcal{K}$$

$$\sum_m x_{ijkm} \leq y_k \quad \forall i, j \in \mathcal{N}, m \in \mathcal{K}$$

$$\sum_k \sum_m x_{ijkm} = 1 \quad \forall i, j \in \mathcal{N}$$

$$x_{ijkm} \geq 0 \quad \forall i, j \in \mathcal{N}, k, m \in \mathcal{K}$$

$$y_k \in \{0, 1\} \quad k \in \mathcal{K}$$

# Hamacher et al

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

Classificação

Modelos de Atribuição Múltipla

- Modelos de Atribuição Múltipla
- Parâmetro Custo
- O'Kelly
- Campbell
- Klinecicz
- Ernst e Krishnamoorthy
- Skorin Kapov et al
- Hamacher et al
- Comparação: CAB10 - CPU (S)
- Comparação: CAB25 GAP (%)
- Comparação: CAB20 Nós B&B

Problemas de Atribuição Quadráticos

O Problema

Linearizando o PQA

Experiência Computacional

$$\min \sum_k a_k y_k + \sum_i \sum_j \sum_k \sum_m w_{ij} c_{ijkm} x_{ijkm}$$

subject to

$$\sum_{m|m \neq k} x_{ijmk} + \sum_m x_{ijkm} \leq y_k \quad \forall i, j \in \mathcal{N}, k \in \mathcal{K}$$

$$\sum_k \sum_m x_{ijkm} = 1 \quad \forall i, j \in \mathcal{N}$$

$$x_{ijkm} \geq 0 \quad \forall i, j \in \mathcal{N}, k, m \in \mathcal{K}$$

$$y_k \in \{0, 1\} \quad k \in \mathcal{K}$$

# Comparação: CAB10 - CPU (S)

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

Classificação

Modelos de Atribuição Múltipla

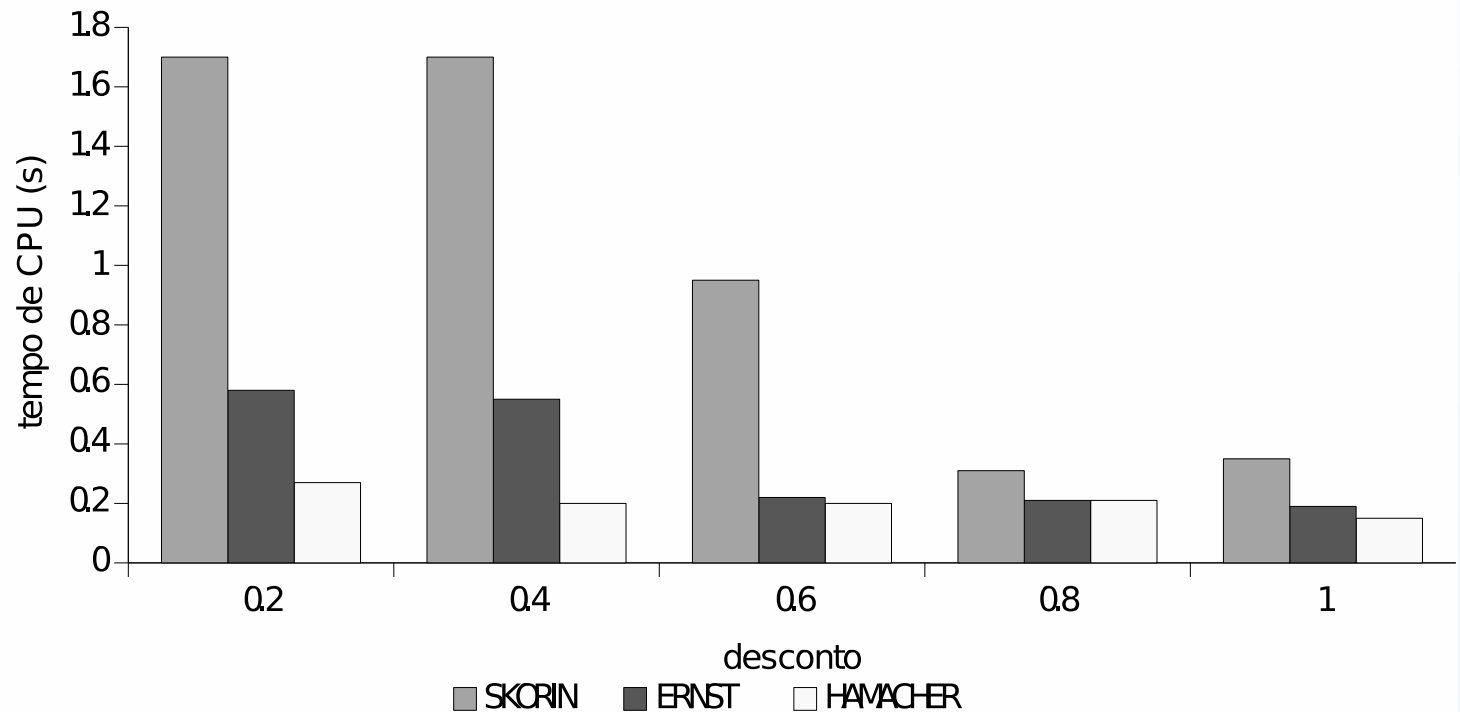
- Modelos de Atribuição Múltipla
- Parâmetro Custo
- O'Kelly
- Campbell
- Klincewicz
- Ernst e Krishnamoorthy
- Skorin Kapov et al
- Hamacher et al
- Comparação: CAB10 - CPU (S)
- Comparação: CAB25 GAP (%)
- Comparação: CAB20 Nós B&B

Problemas de Atribuição Quadráticos

O Problema

Linearizando o PQA

Experiência Computacional



# Comparação: CAB25 GAP (%)

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

Classificação

Modelos de Atribuição Múltipla

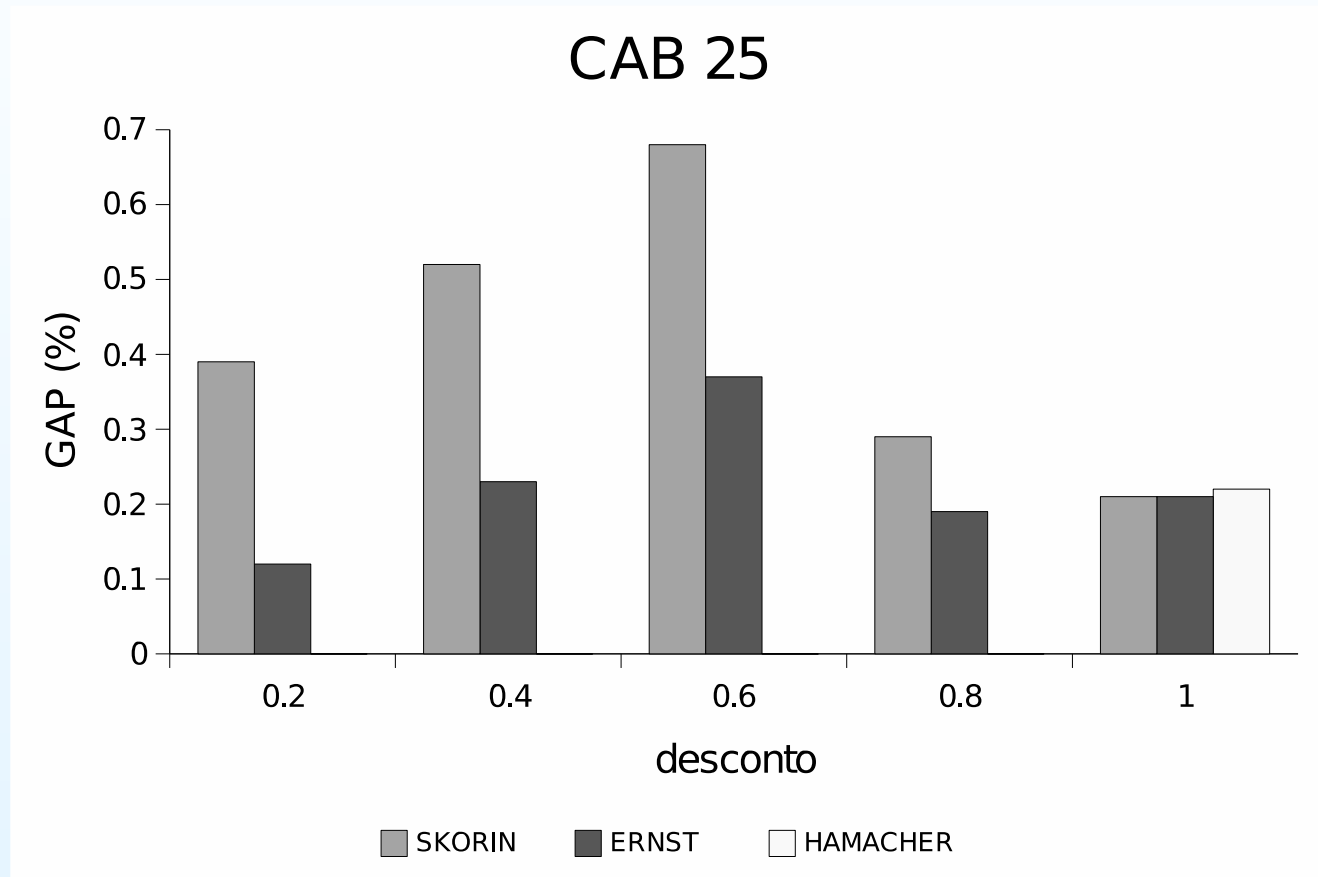
- Modelos de Atribuição Múltipla
- Parâmetro Custo
- O'Kelly
- Campbell
- Klincewicz
- Ernst e Krishnamoorthy
- Skorin Kapov et al
- Hamacher et al
- Comparação: CAB10 - CPU (S)
- Comparação: CAB25 GAP (%)
- Comparação: CAB20 Nós B&B

Problemas de Atribuição Quadráticos

O Problema

Linearizando o PQA

Experiência Computacional



# Comparação: CAB20 Nós B&B

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

Classificação

Modelos de Atribuição Múltipla

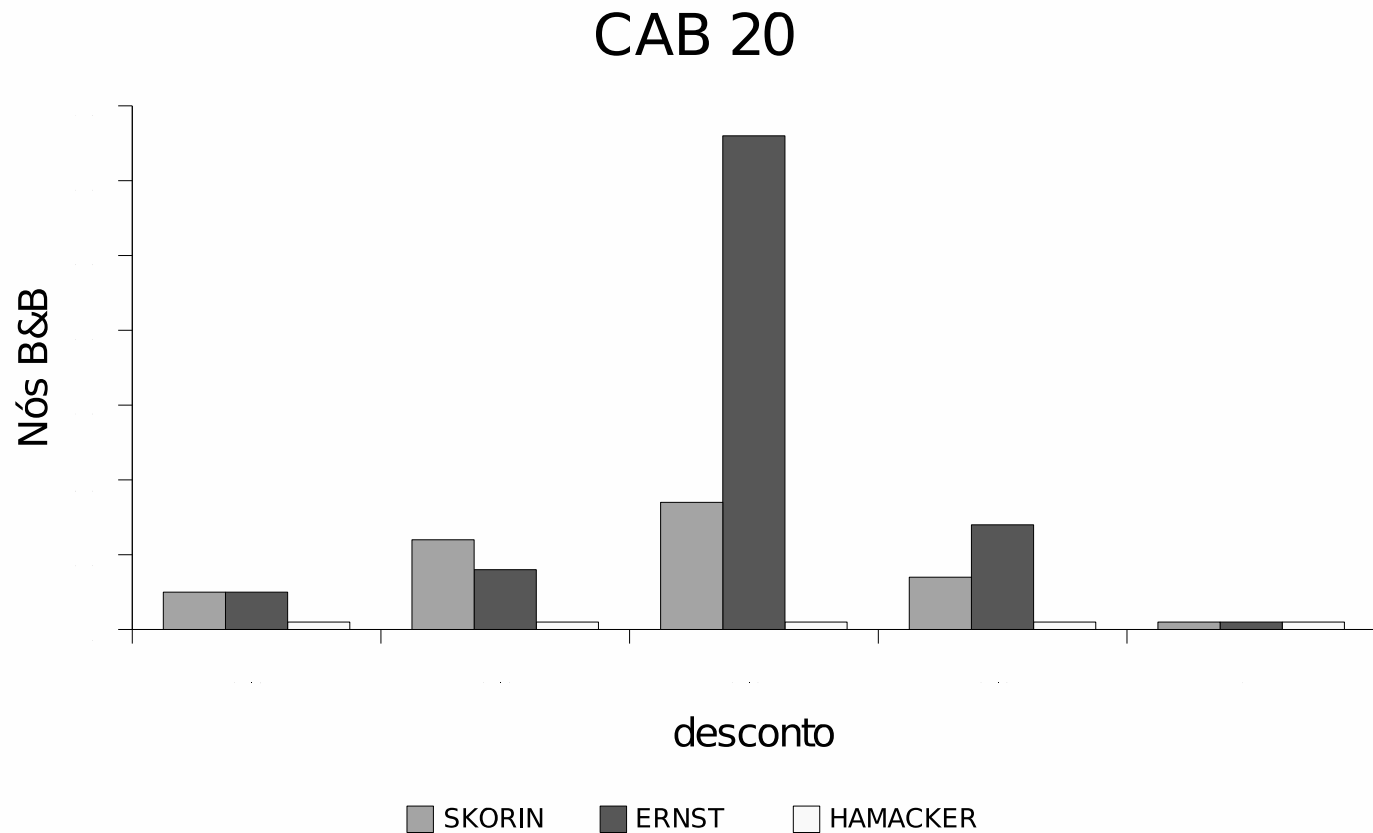
- Modelos de Atribuição Múltipla
- Parâmetro Custo
- O'Kelly
- Campbell
- Klinecicz
- Ernst e Krishnamoorthy
- Skorin Kapov et al
- Hamacher et al
- Comparação: CAB10 - CPU (S)
- Comparação: CAB25 GAP (%)
- Comparação: CAB20 Nós B&B

Problemas de Atribuição Quadráticos

O Problema

Linearizando o PQA

Experiência Computacional



# Problemas de Atribuição Quadráticos

# Problemas de Atribuição Quadráticos

- O Problema.
- Modelos.
- Experiência Computacional.

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

Classificação

Modelos de Atribuição Múltipla

Problemas de Atribuição  
Quadráticos

● Problemas de Atribuição  
Quadráticos

O Problema

Linearizando o PQA

Experiência Computacional

Desenho de Redes  
Congestionadas

O Problema

Modelo

# O Problema

# Motivação

- Preocupação com uso otimizado de recursos no pós-guerra.
- Validar formalmente a sustentabilidade do capitalismo.
- Koopmans e Beckmann: Trabalho seminal em 1957.

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

Classificação

Modelos de Atribuição Múltipla

Problemas de Atribuição  
Quadráticos

O Problema

● **Motivação**

● Atribuição linear

● Características da  
Atribuição Linear

● A idéia central

● Medindo a  
Interdependência  
locacional

● Características da  
Atribuição Quadrática

Linearizando o PQA

Experiência Computacional

Desenho de Redes  
Congestionadas

O Problema

# Atribuição linear

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

Classificação

Modelos de Atribuição Múltipla

Problemas de Atribuição  
Quadráticos

O Problema

- Motivação
- Atribuição linear
- Características da Atribuição Linear
- A idéia central
- Medindo a Interdependência locacional
- Características da Atribuição Quadrática

Linearizando o PQA

Experiência Computacional

Desenho de Redes  
Congestionadas

O Problema

(1)

$$\max p = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ki} x_{ki}$$

sujeito a:

(2)

$$\sum_{k=1}^n x_{ki} = 1, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

(3)

$$\sum_{i=1}^n x_{ki} = 1, \quad \forall k = 1, \dots, n$$

(4)

$$x_{ki} \in \{0, 1\}, \quad \forall k, i = 1, \dots, n.$$

# Características da Atribuição Linear

- Fácil de interpretar: o dual é o mesmo do problema de transporte.
- Fácil de resolver: o Método Húngaro é de tempo polinomial.
- É um modelo locacional muito simplório.

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

Classificação

Modelos de Atribuição Múltipla

Problemas de Atribuição  
Quadráticos

O Problema

- Motivação
- Atribuição linear
- Características da  
Atribuição Linear
- A idéia central
- Medindo a  
Interdependência  
locacional
- Características da  
Atribuição Quadrática

Linearizando o PQA

Experiência Computacional

Desenho de Redes  
Congestionadas

O Problema

# A idéia central

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

Classificação

Modelos de Atribuição Múltipla

Problemas de Atribuição  
Quadráticos

O Problema

- Motivação
- Atribuição linear
- Características da  
Atribuição Linear
- A idéia central
- Medindo a  
Interdependência  
locacional
- Características da  
Atribuição Quadrática

Linearizando o PQA

Experiência Computacional

Desenho de Redes  
Congestionadas

O Problema

$QAP = LAP + \text{Interdependência Locacional.}$

# Medindo a Interdependência locacional

$$(5) \quad q = \sum_{(k,l)} \sum_{(i,j)} b_{kl} x_{ki} c_{ij} x_{lj}$$

Interdependência avaliada pelos fluxos de comodidades intermediários entre diferentes atividades.

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

Classificação

Modelos de Atribuição Múltipla

Problemas de Atribuição  
Quadráticos

O Problema

- Motivação
- Atribuição linear
- Características da Atribuição Linear
- A idéia central
- Medindo a Interdependência locacional
- Características da Atribuição Quadrática

Linearizando o PQA

Experiência Computacional

Desenho de Redes  
Congestionadas

O Problema

# Características da Atribuição Quadrática

- difícil de interpretar.
- difícil de resolver: Formulações fortes muito difíceis.
- difícil de resolver: Formulações fáceis muito fracas.
- difícil de resolver: se  $n \geq 20$  a instância é considerada muito difícil.

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

Classificação

Modelos de Atribuição Múltipla

Problemas de Atribuição  
Quadráticos

O Problema

- Motivação
- Atribuição linear
- Características da  
Atribuição Linear
- A idéia central
- Medindo a  
Interdependência  
locacional
- Características da  
Atribuição Quadrática

Linearizando o PQA

Experiência Computacional

Desenho de Redes  
Congestionadas

O Problema

# Linearizando o PQA

# Linearizações e Limites

- Formulação de Koopmans e Beckmann.
- Limite de Gilmore-Lawler.
- Formulação de Lawler.
- Formulação de Frieze e Yadegar.
- Formulação de Adams e Johnson.
- Formulação de Miranda e Luna.

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

Classificação

Modelos de Atribuição Múltipla

Problemas de Atribuição  
Quadráticos

O Problema

Linearizando o PQA

● Linearizações e Limites

● Koopmans e Beckmann

● Gilmore-Lawler Bound

● Gilmore-Lawler Bound

● Lawler

● Frieze e Yadegar

● Adams e Johnson

● Miranda e Luna

● Considerações

Experiência Computacional

Desenho de Redes  
Congestionadas

O Problema

Modelo

# Koopmans e Beckmann

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

Classificação

Modelos de Atribuição Múltipla

Problemas de Atribuição  
Quadráticos

O Problema

Linearizando o PQA

- Linearizações e Limites
- Koopmans e Beckmann
- Gilmore-Lawler Bound
- Gilmore-Lawler Bound
- Lawler
- Frieze e Yadegar
- Adams e Johnson
- Miranda e Luna
- Considerações

Experiência Computacional

Desenho de Redes  
Congestionadas

O Problema

Modelo

$$(6) \quad \max \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ki} x_{ki} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n c_{ij} f_{ij}^{kl}$$

sujeito a (2) - (4) e:

$$(7) \quad b_{kl} x_{ki} + \sum_{j=1}^n f_{ji}^{kl} = b_{kl} x_{li} + \sum_{j=1}^n f_{ij}^{kl}, \quad \forall i, k, l = 1, \dots, n$$

$$(8) \quad f_{ii}^{kl} = 0, \quad \forall i, k, l = 1, \dots, n$$

$$(9) \quad f_{ij}^{kl} \geq 0, \quad \forall i, j, k, l = 1, \dots, n$$

É muito fraca para o problema.

# Gilmore-Lawler Bound

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

Classificação

Modelos de Atribuição Múltipla

Problemas de Atribuição  
Quadráticos

O Problema

Linearizando o PQA

- Linearizações e Limites
- Koopmans e Beckmann
- **Gilmore-Lawler Bound**
- Gilmore-Lawler Bound
- Lawler
- Frieze e Yadegar
- Adams e Johnson
- Miranda e Luna
- Considerações

Experiência Computacional

Desenho de Redes  
Congestionadas

O Problema

Modelo

$$(10) \quad \max p = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n (a_{ki} - \lambda_{ki}) x_{ki}$$

sujeito a:

$$(11) \quad \sum_{k=1}^n x_{ki} = 1, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$(12) \quad \sum_{i=1}^n x_{ki} = 1, \quad \forall k = 1, \dots, n$$

$$(13) \quad x_{ki} \in \{0, 1\}, \quad \forall k, i = 1, \dots, n.$$

# Gilmore-Lawler Bound

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

Classificação

Modelos de Atribuição Múltipla

Problemas de Atribuição  
Quadráticos

O Problema

Linearizando o PQA

- Linearizações e Limites
- Koopmans e Beckmann
- Gilmore-Lawler Bound
- **Gilmore-Lawler Bound**
- Lawler
- Frieze e Yadegar
- Adams e Johnson
- Miranda e Luna
- Considerações

Experiência Computacional

Desenho de Redes  
Congestionadas

O Problema

Modelo

$$(14) \quad \lambda_{ki} = \max \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{kilj} y_{kilj}$$

sujeito a (2) - (4) e:

$$(15) \quad \sum_{j=1}^n y_{kilj} = x_{ki}, \quad \forall i, k, l = 1, \dots, n, \quad i \neq j, \quad k \neq l$$

$$(16) \quad \sum_{l=1}^n y_{kilj} = x_{ki}, \quad \forall i, j, k = 1, \dots, n, \quad i \neq j, \quad k \neq l$$

$$(17) \quad y_{kilj} \geq 0, \quad \forall i, j, k, l = 1, \dots, n, \quad i \neq j, \quad k \neq l$$

O GLB é avaliado via  $n^2 + 1$  atribuições lineares.

# Lawler

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

Classificação

Modelos de Atribuição Múltipla

Problemas de Atribuição  
Quadráticos

O Problema

Linearizando o PQA

- Linearizações e Limites
- Koopmans e Beckmann
- Gilmore-Lawler Bound
- Gilmore-Lawler Bound
- Lawler
- Frieze e Yadegar
- Adams e Johnson
- Miranda e Luna
- Considerações

Experiência Computacional

Desenho de Redes  
Congestionadas

O Problema

Modelo

$$(18) \quad \max \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ki} x_{ki} - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{kilj} y_{kilj}$$

sujeito a (2) - (4) e:

$$(19) \quad \sum_{k,l,i,j=1}^n y_{kilj} = n^2$$

$$(20) \quad y_{kilj} \leq x_{ki} , \quad \forall i, j, k, l = 1, \dots, n, \quad i \neq j, \quad k \neq l$$

$$(21) \quad y_{kilj} \leq x_{lj} , \quad \forall i, j, k, l = 1, \dots, n, \quad i \neq j, \quad k \neq l$$

$$(22) \quad y_{kilj} \geq 0 , \quad \forall i, j, k, l = 1, \dots, n, \quad i \neq j, \quad k \neq l$$

# Frieze e Yadegar

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

Classificação

Modelos de Atribuição Múltipla

Problemas de Atribuição  
Quadráticos

O Problema

Linearizando o PQA

- Linearizações e Limites
- Koopmans e Beckmann
- Gilmore-Lawler Bound
- Gilmore-Lawler Bound
- Lawler
- Frieze e Yadegar
- Adams e Johnson
- Miranda e Luna
- Considerações

Experiência Computacional

Desenho de Redes  
Congestionadas

O Problema

Modelo

$$(23) \quad \max \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ki} x_{ki} - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{kilj} y_{kilj}$$

sujeito a (2) - (4) e:

$$(24) \quad \sum_{j=1}^n y_{kilj} = x_{ki}, \quad \forall i, k, l = 1, \dots, n, \quad i \neq j, \quad k \neq l$$

$$(25) \quad \sum_{l=1}^n y_{kilj} = x_{ki}, \quad \forall i, j, k = 1, \dots, n, \quad i \neq j, \quad k \neq l$$

$$(26) \quad \sum_{k=1}^n y_{kilj} = x_{lj}, \quad \forall i, j, l = 1, \dots, n, \quad i \neq j, \quad k \neq l$$

$$(27) \quad \sum_{i=1}^n y_{kilj} = x_{lj}, \quad \forall j, l, k = 1, \dots, n, \quad i \neq j, \quad k \neq l$$

$$(28) \quad y_{kilj} \geq 0, \quad \forall i, j, k, l = 1, \dots, n, \quad i \neq j, \quad k \neq l$$

# Adams e Johnson

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

Classificação

Modelos de Atribuição Múltipla

Problemas de Atribuição  
Quadráticos

O Problema

Linearizando o PQA

- Linearizações e Limites
- Koopmans e Beckmann
- Gilmore-Lawler Bound
- Gilmore-Lawler Bound
- Lawler
- Frieze e Yadegar
- Adams e Johnson
- Miranda e Luna
- Considerações

Experiência Computacional

Desenho de Redes  
Congestionadas

O Problema

Modelo

$$(29) \quad \max \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ki} x_{ki} - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{kilj} y_{kilj}$$

sujeito a (2) - (4) e:

$$(30) \quad \sum_{j=1}^n y_{kilj} = x_{ki}, \quad \forall i, k, l = 1, \dots, n, \quad i \neq j, \quad k \neq l$$

$$(31) \quad \sum_{l=1}^n y_{kilj} = x_{ki}, \quad \forall i, j, k = 1, \dots, n, \quad i \neq j, \quad k \neq l$$

$$(32) \quad y_{kilj} = y_{ljki}, \quad \forall i, j, k, l = 1, \dots, n, \quad i \neq j, \quad k \neq l,$$

$$(33) \quad y_{kilj} \geq 0, \quad \forall i, j, k, l = 1, \dots, n, \quad i \neq j, \quad k \neq l$$

# Miranda e Luna

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

Classificação

Modelos de Atribuição Múltipla

Problemas de Atribuição  
Quadráticos

O Problema

Linearizando o PQA

- Linearizações e Limites
- Koopmans e Beckmann
- Gilmore-Lawler Bound
- Gilmore-Lawler Bound
- Lawler
- Frieze e Yadegar
- Adams e Johnson
- **Miranda e Luna**
- Considerações

Experiência Computacional

Desenho de Redes  
Congestionadas

O Problema

Modelo

$$(34) \quad \max \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ki} x_{ki} - \sum_{(i,j), i \neq j} \sum_{(k,l), k \neq l} c_{ij} f_{ij}^{kl}$$

sujeito a (2) - (4) e:

$$(35) \quad - \sum_{j=1}^n f_{ij}^{kl} = -b_{kl} x_{ki}, \quad \forall i, k, l = 1, \dots, n, i \neq j, k \neq l$$

$$(36) \quad \sum_{i=1}^n f_{ij}^{kl} = b_{kl} x_{lj}, \quad \forall j, k, l = 1, \dots, n, i \neq j, k \neq l$$

$$(37) \quad b_{lk} f_{ij}^{kl} = b_{kl} f_{ji}^{lk}, \quad \forall i, j, k, l = 1, \dots, n, i \neq j, k \neq l$$

$$(38) \quad f_{ij}^{kl} \geq 0, \quad \forall i, j, k, l = 1, \dots, n, i \neq j, k \neq l$$

# Considerações

- O problema principal do PQA é o excessivo número de graus de simetria.
- O termo linear  $a_{ki}$  é uma boa alternativa para destruir tal simetria.
- Conjectura: O termo linear impacta todo e qualquer limite do problema.
- Conjectura: A formulação de Miranda e Luna aproveita melhor que as demais o termo linear.

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

Classificação

Modelos de Atribuição Múltipla

Problemas de Atribuição  
Quadráticos

O Problema

Linearizando o PQA

- Linearizações e Limites
- Koopmans e Beckmann
- Gilmore-Lawler Bound
- Gilmore-Lawler Bound
- Lawler
- Frieze e Yadegar
- Adams e Johnson
- Miranda e Luna
- Considerações

Experiência Computacional

Desenho de Redes  
Congestionadas

O Problema

Modelo

# Experiência Computacional

# Comparações

- Limites de PL: AJ94 x ML04.
- Tempos de Computação: AJ94 x ML04.
- Limites de PL: GLB x ML04.
- Tempos de computação: GLB x ML04.

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

Classificação

Modelos de Atribuição Múltipla

Problemas de Atribuição  
Quadráticos

O Problema

Linearizando o PQA

Experiência Computacional

## ● Comparações

- Limites de PL: AJ94 x ML04
- Tempos de Computação (PL): AJ94 x ML04.
- Tempos de Computação (MIP): AJ94 x ML04.
- Limites de PL: GLB x ML04
- Limites de PL: GLB x ML04
- Tempos de Computação (MIP): GLB x ML04.
- Preprocessando a formulação ML04
- Tempos de Computação (MIP): GLB x CML04
- Fortalecendo CML04
- Limites de PL: GLB x SCMI 04

# Limites de PL: AJ94 x ML04

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

Classificação

Modelos de Atribuição Múltipla

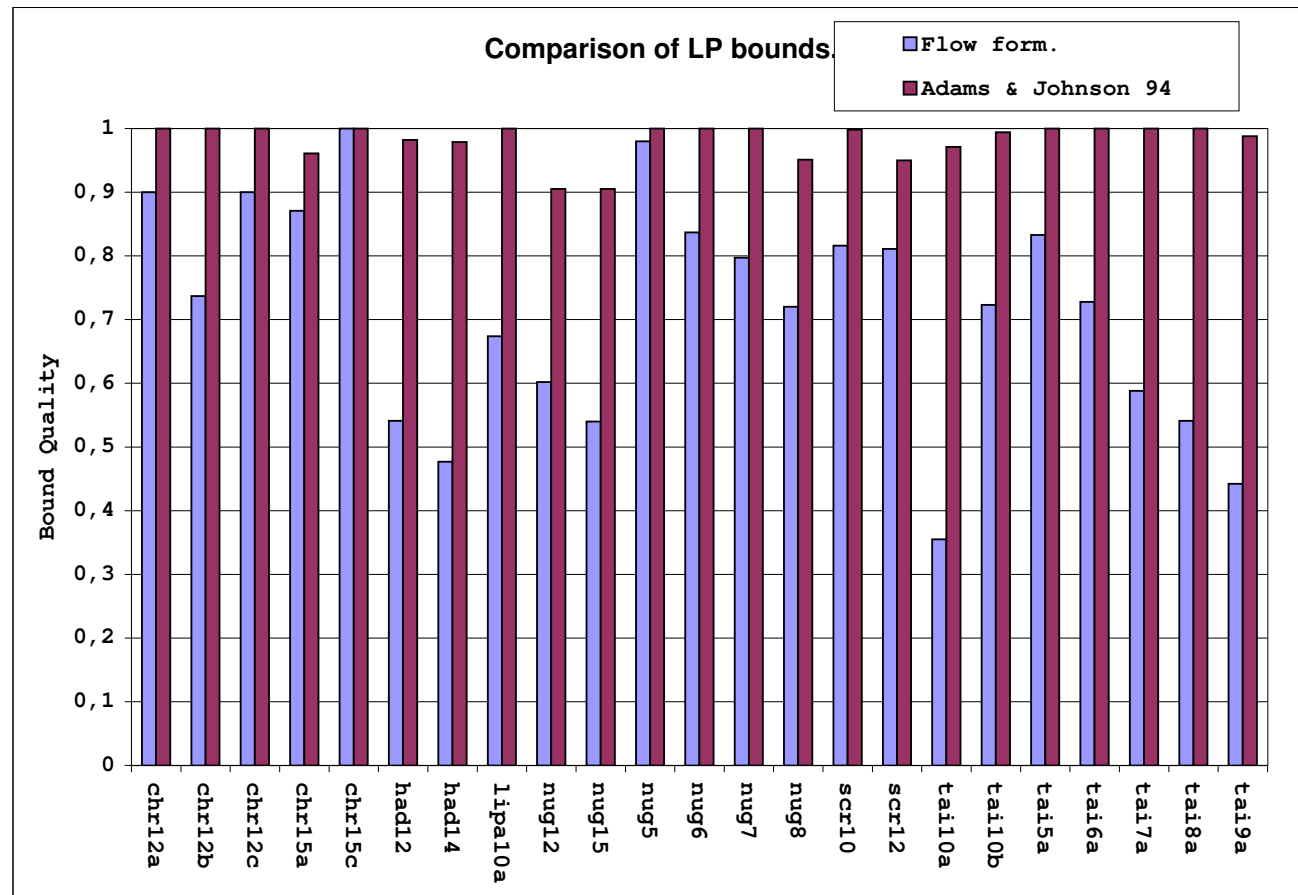
Problemas de Atribuição  
Quadráticos

O Problema

Linearizando o PQA

Experiência Computacional

- Comparações
- Limites de PL: AJ94 x ML04
- Tempos de Computação (PL): AJ94 x ML04.
- Tempos de Computação (MIP): AJ94 x ML04.
- Limites de PL: GLB x ML04
- Limites de PL: GLB x ML04
- Tempos de Computação (MIP): GLB x ML04.
- Preprocessando a formulação ML04
- Tempos de Computação (MIP): GLB x CML04
- Fortalecendo CML04
- Limites de PL: GLB x SCMI 04



# Tempos de Computação (PL): AJ94 x ML04.

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

Classificação

Modelos de Atribuição Múltipla

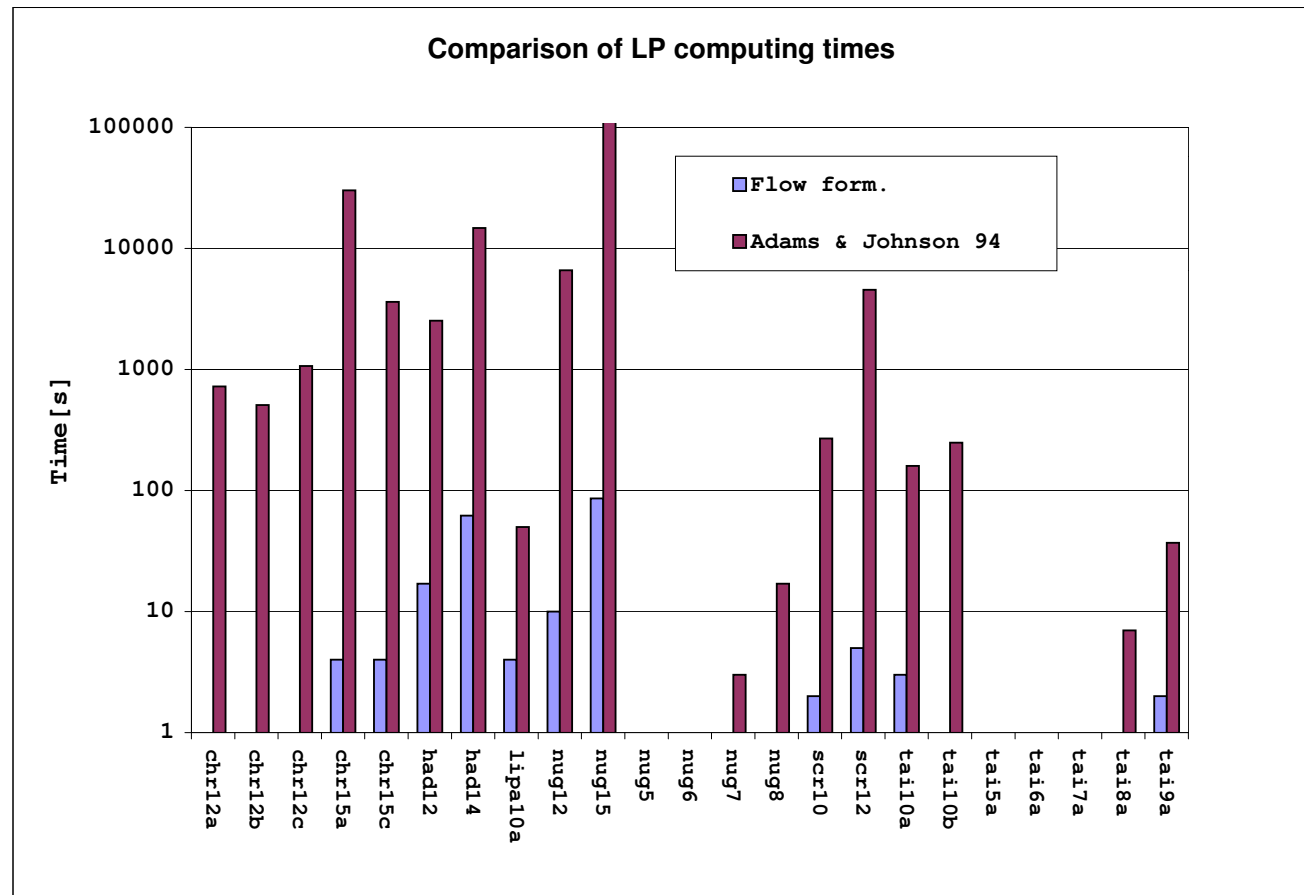
Problemas de Atribuição  
Quadráticos

O Problema

Linearizando o PQA

Experiência Computacional

- Comparações
- Limites de PL: AJ94 x ML04
- **Tempos de Computação (PL): AJ94 x ML04.**
- Tempos de Computação (MIP): AJ94 x ML04.
- Limites de PL: GLB x ML04
- Limites de PL: GLB x ML04
- Tempos de Computação (MIP): GLB x ML04.
- Preprocessando a formulação ML04
- Tempos de Computação (MIP): GLB x CML04
- Fortalecendo CML04
- Limites de PL: GLB x SCMI 04



# Tempos de Computação (MIP): AJ94 x ML04.

Original instance	Problem size	Variables		p/q ratio	Flow form. time[s]	Adams and Johnson time[s]
		Integer	Continuous			
chr12a	12	144	17424	0.426	4	584
chr12b				0.383	5	516
chr12c				0.314	3	803
chr15a	15	225	44100	0.631	16	14209
chr15a				0.856	6	10125
chr15c				0.807	9	3058
chr18a	18	324	93636	0.564	116	*
chr18b				1.864	7	*
chr20a				1.047	76	*
chr20b	20	400	144400	0.824	47	*
chr20c				1.056	108	*
chr22a	22	484	213444	0.304	138	*
chr22b				0.293	96	*

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

Classificação

Modelos de Atribuição Múltipla

Problemas de Atribuição Quadráticos

O Problema

Linearizando o PQA

Experiência Computacional

- Comparações
- Limites de PL: AJ94 x ML04
- Tempos de Computação (PL): AJ94 x ML04.
- **Tempos de Computação (MIP): AJ94 x ML04.**
- Limites de PL: GLB x ML04
- Limites de PL: GLB x ML04
- Tempos de Computação (MIP): GLB x ML04.
- Preprocessando a formulação ML04
- Tempos de Computação (MIP): GLB x CML04
- Fortalecendo CML04
- Limites de PL: GLB x SCMI 04

# Limites de PL: GLB x ML04

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

Classificação

Modelos de Atribuição Múltipla

Problemas de Atribuição  
Quadráticos

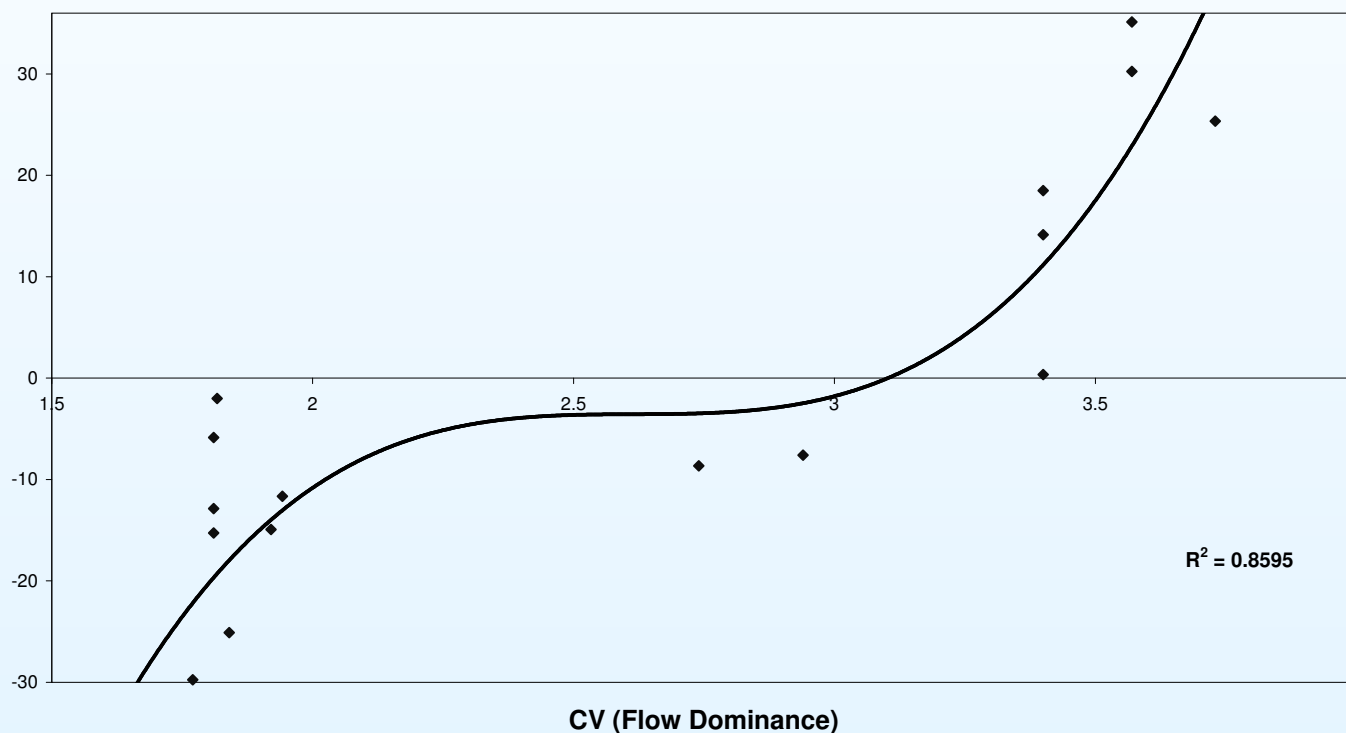
O Problema

Linearizando o PQA

Experiência Computacional

- Comparações
- Limites de PL: AJ94 x ML04
- Tempos de Computação (PL): AJ94 x ML04.
- Tempos de Computação (MIP): AJ94 x ML04.
- Limites de PL: GLB x ML04
- Limites de PL: GLB x ML04
- Tempos de Computação (MIP): GLB x ML04.
- Preprocessando a formulação ML04
- Tempos de Computação (MIP): GLB x CML04
- Fortalecendo CML04
- Limites de PL: GLB x SCMI 04

Flow Formulation Improvement from GLB X CV (%)



# Limites de PL: GLB x ML04

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

Classificação

Modelos de Atribuição Múltipla

Problemas de Atribuição  
Quadráticos

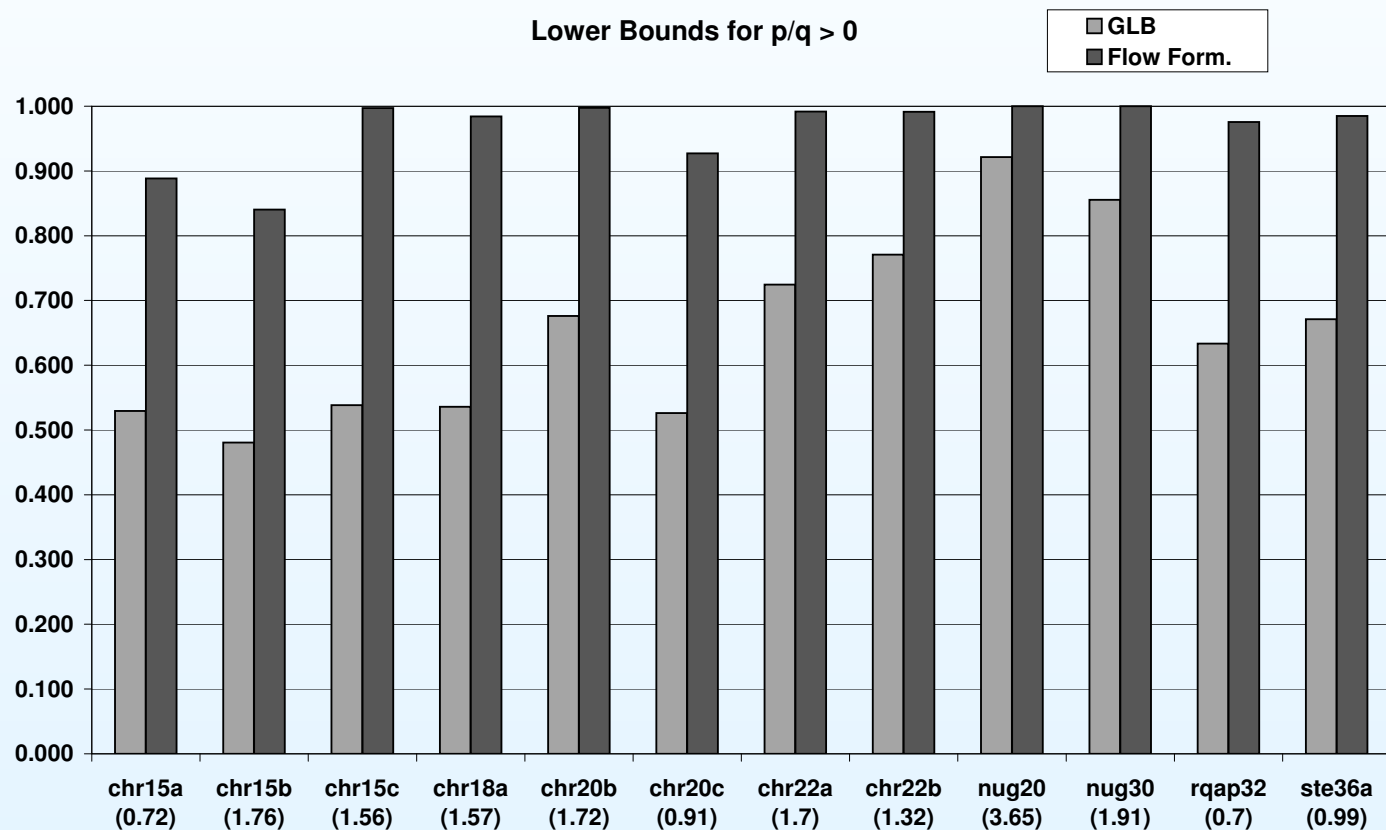
O Problema

Linearizando o PQA

Experiência Computacional

- Comparações
- Limites de PL: AJ94 x ML04
- Tempos de Computação (PL): AJ94 x ML04.
- Tempos de Computação (MIP): AJ94 x ML04.
- Limites de PL: GLB x ML04
- Limites de PL: GLB x ML04
- Tempos de Computação (MIP): GLB x ML04.
- Preprocessando a formulação ML04
- Tempos de Computação (MIP): GLB x CML04
- Fortalecendo CML04
- Limites de PL: GLB x SCMI 04

Lower Bounds for  $p/q > 0$



# Tempos de Computação (MIP): GLB x ML04.

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

Classificação

Modelos de Atribuição Múltipla

Problemas de Atribuição  
Quadráticos

O Problema

Linearizando o PQA

Experiência Computacional

- Comparações
- Limites de PL: AJ94 x ML04
- Tempos de Computação (PL): AJ94 x ML04.
- Tempos de Computação (MIP): AJ94 x ML04.
- Limites de PL: GLB x ML04
- Limites de PL: GLB x ML04
- Tempos de Computação (MIP): GLB x ML04.
- Preprocessando a formulação ML04
- Tempos de Computação (MIP): GLB x CML04

● Fortalecendo CML04

● Limites de PL: GLB x SCMI 04

Original Instance	Instance size	Variables		p/q ratio	Flow form. time[s]	Branch-and-Bound (GLB) time[s]
		Integer	Continuous			
chr15b	15	225	44100	0.726	36	0
chr18a	18	324	93636	1.304	41	26
chr20c	20	400	144400	0.707	54	75
chr22a	22	484	213444	0.744	19	11
nug20	20	400	144400	3.268	42	0
nug30	30	900	756900	1.358	1779	23
rqap32	32	1024	984064	0.701	1964	2503
rqap33	33	1089	1115136	0.97	3236	3060
rqap34	34	1156	1258884	0.74	7207	7198
rqap35	35	1225	1416100	0.87	2610	16154
ste36a				0.687	2457	27974
ste36a	36	1296	1587600	1.199	2801	2925
tho40				0.741	10532	*
tho40	40	1600	2433600	1.040	7689	1984

# Preprocessando a formulação ML04

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

Classificação

Modelos de Atribuição Múltipla

Problemas de Atribuição  
Quadráticos

O Problema

Linearizando o PQA

Experiência Computacional

- Comparações
- Limites de PL: AJ94 x ML04
- Tempos de Computação (PL): AJ94 x ML04.
- Tempos de Computação (MIP): AJ94 x ML04.
- Limites de PL: GLB x ML04
- Limites de PL: GLB x ML04
- Tempos de Computação (MIP): GLB x ML04.
- **Preprocessando a formulação ML04**
- Tempos de Computação (MIP): GLB x CML04
- Fortalecendo CML04
- Limites de PL: GLB x SCMI 04

$$(39) \max \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ki} x_{ki} - \sum_{i \neq j} \sum_{(k,l) \in \phi} [c_{ij} b_{kl} + c_{ji} b_{lk}] f_{ij}^{kl}$$

subject to (2) - (4) and:

$$(40) \sum_{j \neq i} f_{ij}^{kl} = x_{ki}, \forall i = 1, \dots, n, \forall (k, l) \in \phi$$

$$(41) \sum_{i \neq j} f_{ij}^{kl} = x_{lj}, \forall j = 1, \dots, n, \forall (k, l) \in \phi$$

$$(42) f_{ij}^{kl} \geq 0, \forall i, j = 1, \dots, n, i \neq j, \forall (k, l) \in \phi$$

onde:

$$(43) \phi = \{(k, l) | k < l \wedge (b_{kl} \neq 0 \vee b_{lk} \neq 0)\}$$

# Tempos de Computação (MIP): GLB x CML04

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

Classificação

Modelos de Atribuição Múltipla

Problemas de Atribuição Quadráticos

O Problema

Linearizando o PQA

Experiência Computacional

- Comparações
- Limites de PL: AJ94 x ML04
- Tempos de Computação (PL): AJ94 x ML04.
- Tempos de Computação (MIP): AJ94 x ML04.
- Limites de PL: GLB x ML04
- Limites de PL: GLB x ML04
- Tempos de Computação (MIP): GLB x ML04.
- Preprocessando a formulação ML04
- Tempos de Computação (MIP): GLB x CML04

● Fortalecendo CML04

● Limites de PL: GLB x SCMI 04

Original Instance	Instance size	p/q ratio	Flow Form. Time [s]	Branch-And-Bound (GLB) Time [s]	Compact Flow Form. Time [s]
chr15a	15	0.631	16	0	14
chr15b		0.726	36	0	9
chr15c		0.807	9	0	8
chr18a	18	0.564	116	83	<b>74</b>
chr18a		1.304	41	26	<b>22</b>
chr20b	20	1.702	10	15	<b>13</b>
chr20c		0.707	54	75	<b>36</b>
chr22a	22	0.744	19	11	<b>2</b>
chr22b		1.341	18	4	6
nug20	20	3.268	42	0	4
nug20		4.477	80	0	4
nug30	30	1.358	1779	23	200
rqap32	32	0.701	1964	2503	<b>1306</b>
rqap33	33	0.97	3236	3060	<b>1735</b>
rqap34	34	0.74	7207	7198	<b>3417</b>
rqap35	35	0.87	2610	16154	<b>1956</b>
ste36a	36	1.199	2801	2925	<b>325</b>
tho40	40	0.741	10532	*	<b>5362</b>
tho40		1.040	7689	1984	<b>1551</b>
sko42	42	0.854	*	*	<b>16676</b>
sko42		1.280	*	*	<b>3724</b>

# Fortalecendo CML04

Podemos adicionar duas famílias de desigualdades válidas:

$$(44) \sum_{k, (k,l) \in \phi} f_{ij}^{kl} \leq x_{lj}, \forall i, j = 1, \dots, n, i \neq j, \forall l, (k,l) \in \phi$$

$$(45) \sum_{l, (k,l) \in \phi} f_{ij}^{kl} \leq x_{ki}, \forall i, j = 1, \dots, n, i \neq j, \forall k, (k,l) \in \phi$$

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

Classificação

Modelos de Atribuição Múltipla

Problemas de Atribuição  
Quadráticos

O Problema

Linearizando o PQA

Experiência Computacional

- Comparações
- Limites de PL: AJ94 x ML04
- Tempos de Computação (PL): AJ94 x ML04.
- Tempos de Computação (MIP): AJ94 x ML04.
- Limites de PL: GLB x ML04
- Limites de PL: GLB x ML04
- Tempos de Computação (MIP): GLB x ML04.
- Preprocessando a formulação ML04
- Tempos de Computação (MIP): GLB x CML04

● Fortalecendo CML04

- Limites de PL: GLB x SCMI 04

# Limites de PL: GLB x SCML04

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

Classificação

Modelos de Atribuição Múltipla

Problemas de Atribuição  
Quadráticos

O Problema

Linearizando o PQA

Experiência Computacional

- Comparações
- Limites de PL: AJ94 x ML04
- Tempos de Computação (PL): AJ94 x ML04.
- Tempos de Computação (MIP): AJ94 x ML04.
- Limites de PL: GLB x ML04
- Limites de PL: GLB x ML04
- Tempos de Computação (MIP): GLB x ML04.
- Preprocessando a formulação ML04
- Tempos de Computação (MIP): GLB x CML04
- Fortalecendo CML04

- Limites de PL: GLB x SCML04

instance	ML04		Bound	SCML04		Bound	AJ94		Bound
	lp bound	time[s]	Quality	lp bound	time[s]	Quality	lp bound	time[s]	Quality
chr12a.dat	8593.12	1	0.900	9246.67	1	0.968	9552	725	1.000
chr12b.dat	7184	1	0.737	9742	1	1.000	9742	508	1.000
chr12c.dat	10042.7	1	0.900	10121.1	1	0.907	11156	1068	1.000
chr15a.dat	8621.94	4	0.871	9295.33	4	0.939	9513	30146	0.961
chr15c.dat	9504	4	1.000	9504	4	1.000	9504	3622	1.000
had12.dat	894	17	0.541	1543.78	1414	0.934	1621.54	2533	0.982
had14.dat	1300.5	62	0.477	2583.07	9269	0.948	2666.12	14778	0.979
lipa10a.dat	318.8	4	0.674	448.123	161	0.947	473	50	1.000
nug12.dat	348	10	0.602	471.821	371	0.816	522.89	6597	0.905
nug15.dat	621	86	0.540	912.063	8790	0.793	1041	131923	0.905
nug5.dat	49	1	0.980	50	1	1.000	50	1	1.000
nug6.dat	72	1	0.837	80	1	0.930	86	1	1.000
nug7.dat	118	1	0.797	134.438	1	0.908	148	3	1.000
nug8.dat	154	1	0.720	191	3	0.893	203.5	17	0.951
scr10.dat	21958	2	0.816	24245.8	9	0.901	26873.1	269	0.998
scr12.dat	25474	5	0.811	27368.7	42	0.871	29827.3	4555	0.950
tai10a.dat	47953.3	3	0.355	112221	70	0.831	131098	160	0.971
tai10b.dat	855788	1	0.723	1139856.99	30	0.963	1176140	248	0.994
tai5a.dat	10747	1	0.833	12902	1	1.000	12902	1	1.000
tai6a.dat	21427.8	1	0.728	28013.4	1	0.952	29432	1	1.000
tai7a.dat	31730.1	1	0.588	47948	1	0.888	53976	1	1.000
tai8a.dat	41952.2	1	0.541	69705.1	1	0.899	77502	7	1.000
tai9a.dat	41816	2	0.442	83180.9	24	0.879	93501	37	0.988

# Desenho de Redes Congestionadas

# Desenho de Redes Congestionadas

---

- O Problema.
- Modelos.

Sumário

---

Sistemas Eixo e Raio

---

O Problema

---

Classificação

---

Modelos de Atribuição Múltipla

---

Problemas de Atribuição  
Quadráticos

---

O Problema

---

Linearizando o PQA

---

Experiência Computacional

---

Desenho de Redes  
Congestionadas

---

● Desenho de Redes  
Congestionadas

O Problema

---

Modelo

---

# O Problema

# Motivação

- Cerca de 7/10 do custo das redes está no acesso local.
- Sempre haverá problemas de expansão de capacidade.
- Custos (independente do comportamento do tráfego) são convexos.
- Custos estruturais X Custos operacionais.
- Análise multiproduto X monoproduto.

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

Classificação

Modelos de Atribuição Múltipla

Problemas de Atribuição  
Quadráticos

O Problema

Linearizando o PQA

Experiência Computacional

Desenho de Redes  
Congestionadas

O Problema

- **Motivação**
- Desenho de Redes
- Variáveis e Parâmetros
- Função Integrada de  
Alocação de Capacidade e  
Congestionamento

Modelo

# Desenho de Redes

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

Classificação

Modelos de Atribuição Múltipla

Problemas de Atribuição  
Quadráticos

O Problema

Linearizando o PQA

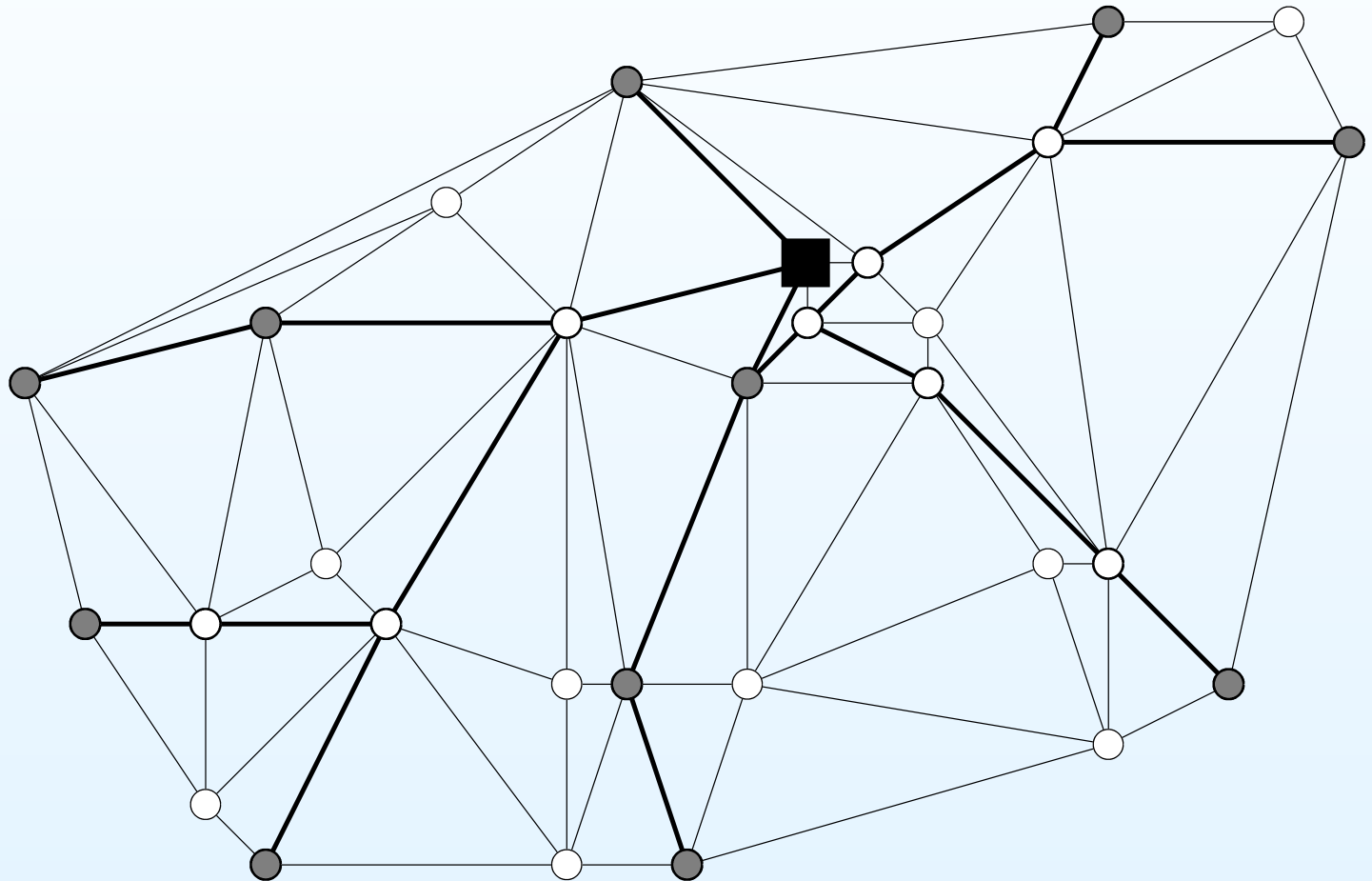
Experiência Computacional

Desenho de Redes  
Congestionadas

O Problema

- Motivação
- **Desenho de Redes**
- Variáveis e Parâmetros
- Função Integrada de Alocação de Capacidade e Congestionamento

Modelo



# Variáveis e Parâmetros

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

Classificação

Modelos de Atribuição Múltipla

Problemas de Atribuição  
Quadráticos

O Problema

Linearizando o PQA

Experiência Computacional

Desenho de Redes  
Congestionadas

O Problema

- Motivação
- Desenho de Redes
- Variáveis e Parâmetros
- Função Integrada de Alocação de Capacidade e Congestionamento

Modelo

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if a directed transmission link is placed in arc } (i, j) \\ 0 & \text{if not;} \end{cases}$$

$f_{ijk}$ : flow destined to demand node  $k$ , passing through arc  $(i, j)$ ;

$g_{ij}$ : total flow of all commodities passing through arc  $(i, j)$ .

And also define the parameters:

$b_{ij}$ : fixed (structural) cost to install a directed transmission link in arc  $(i, j)$ ; we suppose  $b_{ij} = \beta d_{ij}$  where  $d_{ij}$  is the distance (in meters) between  $i$  and  $j$ , and  $\beta$  is the linkage structural cost per meter.

$c_{ijk}$ : variable (operational) cost to transmit one unit of commodity  $k$  through arc  $(i, j)$ ; we suppose  $c_{ijk} = \gamma^k d_{ij}$ ,  $\forall k \in K$ .

# Função Integrada de Alocação de Capacidade e Congestionamento

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

Classificação

Modelos de Atribuição Múltipla

Problemas de Atribuição  
Quadráticos

O Problema

Linearizando o PQA

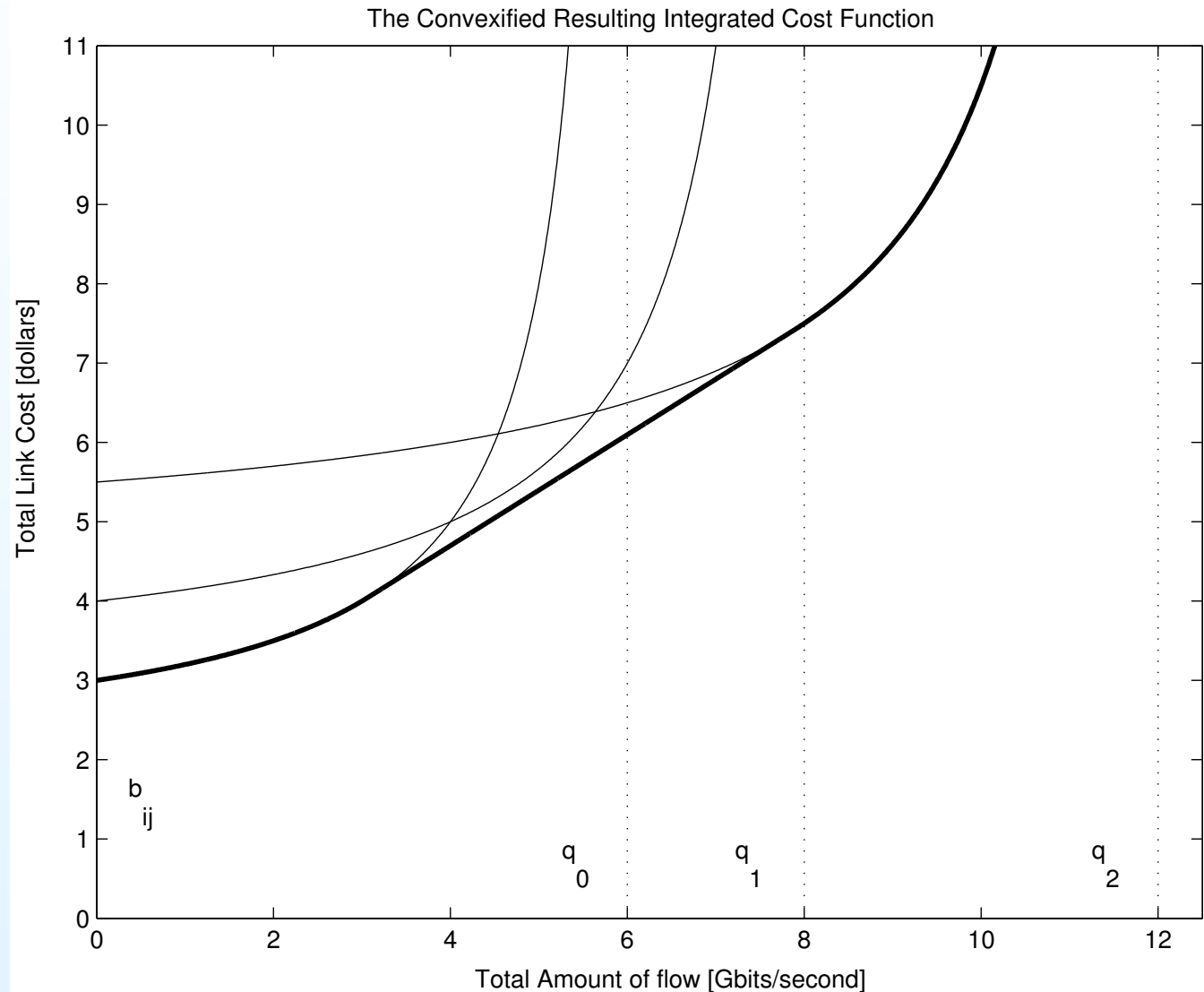
Experiência Computacional

Desenho de Redes  
Congestionadas

O Problema

- Motivação
- Desenho de Redes
- Variáveis e Parâmetros
- Função Integrada de Alocação de Capacidade e Congestionamento

Modelo



# Modelo

# Formulação Multiproduto

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

Classificação

Modelos de Atribuição Múltipla

Problemas de Atribuição  
Quadráticos

O Problema

Linearizando o PQA

Experiência Computacional

Desenho de Redes  
Congestionadas

O Problema

Modelo

● Formulação Multiproduto

● Características

$$(46) \quad \min \sum_{(i,j) \in E} [b_{ij}x_{ij} + \tau_{ij}(g_{ij}) + \sum_{k \in K} c_{ijk}f_{ijk}]$$

subject to:

$$(47) \quad \sum_{k \in K} f_{ijk} - g_{ij} \leq 0, \quad \forall (i,j) \in E$$

$$(48) \quad - \sum_{(o,j) \in E} f_{ojk} = -d_k, \quad \text{for node } o \text{ and } \forall k \in K$$

$$(49) \quad \sum_{(i,k) \in E} f_{ikk} = d_k, \quad \forall k \in K$$

$$(50) \quad \sum_{(i,j) \in E} f_{ijk} - \sum_{(j,l) \in E} f_{jlk} = 0, \quad \forall j \in V - \{o\} \text{ and } j \neq k \text{ and } \forall k \in K$$

$$(51) \quad f_{ijk} \leq d_k x_{ij}, \quad \forall (i,j) \in E \text{ and } \forall k \in K$$

$$(52) \quad f_{ijk} \geq 0, \quad \forall (i,j) \in E \text{ and } \forall k \in K$$

$$(53) \quad g_{ij} \geq 0, \quad \forall (i,j) \in E$$

$$(54) \quad x_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall (i,j) \in E$$

# Características

- Trata-se de programa não linear inteiro misto.
- É tão mais complexo quanto maior é o número de rotas possíveis.
- É tão mais complexo quanto maior é o número de produtos na rede.
- É tão mais complexo à medida que cresce o peso da parcela não linear.

Sumário

Sistemas Eixo e Raio

O Problema

Classificação

Modelos de Atribuição Múltipla

Problemas de Atribuição  
Quadráticos

O Problema

Linearizando o PQA

Experiência Computacional

Desenho de Redes  
Congestionadas

O Problema

Modelo

- Formulação Multiproduto
- Características