

# **EPISTEMOLOGIA INTERATIVA**

14 126 Teoria De Jogos

Sergei Izmalkov

Muhamet Yiuldiz

## **Roteiro**

1. Formalizando Conhecimentos para um participante do jogo
2. Conhecimento Comum
  1. Entre duas pessoas
  2. Entre várias pessoas
  3. Teorema de Acordo
3. Construindo um espaço de estado universal
4. Abordagens Sintáticas e Semânticas  
Teorema de Não-Negócio

## DADOS ELEMENTARES

- $\omega$  = um estado, uma descrição completa do mundo;
- $\Omega$  = o conjunto de todos os estados;
- $E$  = um evento, um subconjunto de  $\Omega$ ;
  - $E \subseteq F = E$  implica  $F$
  - $E \cap F = E$  e  $F$
  - $E \cup F = E$  ou  $F$
- $\mathcal{E}$  = o conjunto de todos os eventos

## FORMALIZAÇÕES EQUIVALENTES DE CONHECIMENTOS

- |  |   |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• Função de Conhecimento: <math>k</math> de <math>\Omega</math> a algum espaço; o agente sabe o valor de <math>k</math>, ou seja, ele conhece <math>k(\omega)</math> porém não <math>\omega</math>.</li> <li>• <b>Função de Informação:</b><br/> <math>I(\omega) = \{ \omega' \in \Omega / k(\omega) = k(\omega') \}</math> <ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>\omega \in I(\omega)</math>;</li> <li>- Se <math>I(\omega) \cap I(\omega') \neq \emptyset</math>, então <math>I(\omega) = I(\omega')</math></li> </ul> </li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>p</math> = preço do pão (<math>p \geq 0</math>)</li> <li>• <math>e</math> = barulho (<math>e \in [0,1]</math>)</li> <li>• <math>\omega = (p, e)</math></li> <li>• Ele recebe um sinal com ruído <math>k = p + e</math></li> <li>• <math>I(p, e) = \{ (p', e') / p' + e' = p + e \}</math></li> </ul> |
|--|---|

## CONHECIMENTOS, CONTINUAÇÃO

- Partição da informação:

- $\mathfrak{I} = \{I(\omega) | \omega \in \Omega\}$

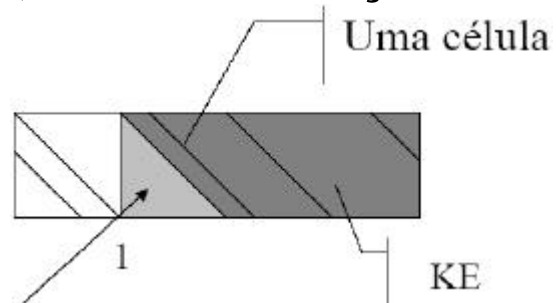
- Campo u(niversal) de Conhecimento:

$\mathcal{K}$  = todas as possíveis uniões de célula em  $\mathfrak{I}$

- Operador de conhecimento:

$$K : \mathfrak{E} \rightarrow \mathfrak{E}$$

- $KE = \{\omega \in \Omega | I(\omega) \subseteq E\}$ 
  - $KE = \bigcup F \in \mathfrak{I} | F \subseteq E$
  - $KE$  é o maior membro de  $\mathcal{K}$  incluído em  $E$ .



- $E = \{ (p,e) \mid p > 1 \}$
- $I(p,e) \subseteq E$  se, e somente se,  $p + e > 2$ .
- $KE = \{(p,e) \mid p + e > 2\}$

## OPERADOR DE CONHECIMENTO

1.  $KE \subseteq E$

2.  $E \subseteq F$  implica em  $KE \subseteq KF$

3.  $KE \subseteq KKE$

4.  $\sim KE \subseteq K \sim KE$

- $K(E \cap F) = K(E) \cap K(F)$
- $KE = KKE$ ;
- $\sim KE = K \sim KE$ .
- $K \Omega = \Omega$ .

1. Se eu sei algo isto deve ser verdade

2. Se  $E$  logicamente implica em  $F$ , e se eu souber que  $E$  é verdadeiro, então sei que  $F$  é verdadeiro.

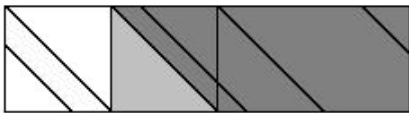
3. Se eu sei algo, eu sei que sei isso.

4. Se eu não sei algo, eu sei que não sei isso.

Associado!

## CONHECIMENTOS COMUNS (2 pessoas)

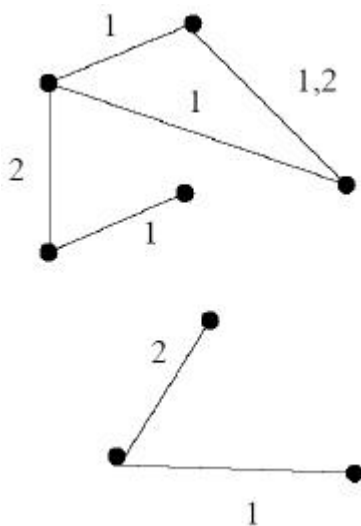
- $i = 1, 2; K_i, I_i, \text{etc.}$
- $\text{CKE} := K_1 E \cap K_2 E \cap K_1 K_2 E \cap K_2 K_1 E \cap K_1 K_2 K_1 E \cap K_2 K_1 K_2 E \cap K_1 K_2 K_1 K_2 E \cap K_2 K_1 K_2 K_1 E \dots$
- $\kappa_1 = p+e; \kappa_2 = p.$
- $I_1(p,e) = \{(p',e') | p'+e'=p+e\}$
- $I_2(p,e) = \{(p',e') | p'=p\}$
- $E = \{(p,e) | p > 1\}$
- $K_1 E = \{(p,e) | p+e > 2\}$
- $K_2 E = \{(p,e) | p > 1\} = E;$
- $K_1 K_2 E = K_1 E$
- $K_2 K_1 E = \{(p,e) | p > 2\}$  (por que?)
- $K_1 K_2 K_1 E = \{(p,e) | p+e > 3\}$
- $\text{CKE} =$



## TEOREMAS SOBRE CK (2 pessoas)

1.  $\text{CKE} \subseteq E$
2.  $K_i \text{CKE} = \text{CKE}$
3.  $E \subseteq F \Rightarrow \text{CKE} \subseteq \text{CKF}$
4.  $\text{CKE}$  é o maior evento  $F$  com  $F \subseteq E$  e  $K_1 F = K_2 F = F.$
5.  $\text{CK}$  é um operador de conhecimento associado com  $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2$
6.  $\text{CKE} = \text{CKCKE}; \sim \text{CKE} = \text{CK} \sim \text{CKE}$
7.  $\text{CKE}\Omega = \Omega$

## UMA ABORDAGEM GRÁFICA



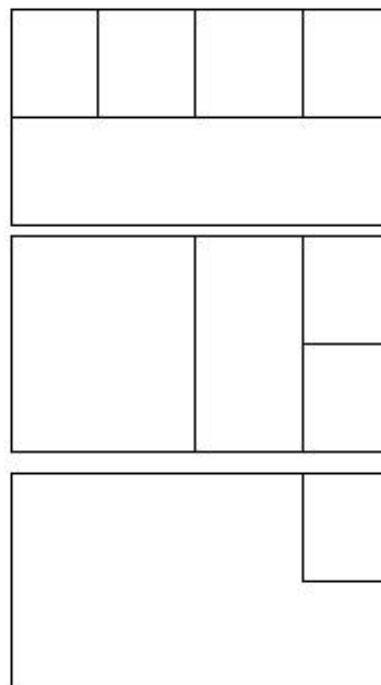
- $\Omega$  = todos os nós
- Dois nós estão na mesma célula de  $i$  se, e somente se, forem ligados por um conector indicado por  $i$ ;
- Partição CK = os maiores subgráficos conexos.

## ADENSAMENTO COMUM $\mathcal{I}_1 \wedge \mathcal{I}_2$

- $\mathcal{I}_1 \wedge \mathcal{I}_2$  é a partição mais fina, que é mais densa que ambos  $\mathcal{I}_1$  e  $\mathcal{I}_2$ , associados com  $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ .

$$I_{1,2}(\omega) = \bigcap_{\omega \in F \in \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2} F$$

- $I_1(\omega) \cup I_2(\omega) \subseteq I_{1,2}(\omega)$
- $I_{1,2}(\omega)$  pode ser escrita como a união de algumas células em  $\mathcal{I}_1$
- $\omega' \in I_{1,2}(\omega)$  se, e somente se,  $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n$ ,  $i(0), i(1), \dots, i(n)$  tal que  $\omega_0 = \omega$ ,  $\omega_n = \omega'$ ,  $\omega_k \in I_{i(k-1)}(\omega_{k-1})$  para todos os  $k > 0$ .



## CONHECIMENTOS COMUNS (n pessoas)

- $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $K_i$ ,  $I_i$ , etc.
  - $K^1 := \bigcap_i K_i$ ;
  - $K^m := (K^1)^m$ ;
  - $CKE := \bigcap_m K^m$
1.  $CKE \subseteq E$
  2.  $K_i CKE = CKE$
  3.  $E \subseteq F \Rightarrow CKE \subseteq CKF$
  4. CK é um operador de conhecimentos associado com  $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2 \cap \dots \cap \mathcal{K}_n$ .
  5. CKE é o maior evento F com  $F \subseteq E$  e  $K_1 F = K_2 F = \dots = K_n F = F$ .
  6.  $CKE = CKCKE$ ;  $\sim CKE = CK \sim CKE$
  7.  $CKE \Omega = \Omega$

## ADENSAMENTO COMUM - idem

- $\mathcal{I}_1 \wedge \mathcal{I}_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{I}_n$  é a porção mais fina que é mais densa do que todos os  $\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_n$ , associados com  $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2 \cap \dots \cap \mathcal{K}_n$ .
- $$I_{1, \dots, n}(\omega) = \bigcap_{\omega \in F \in \mathcal{K}_1 \cap \dots \cap \mathcal{K}_n} F$$

- $I_1, \dots, I_n(\omega)$  pode ser descrita como a união de algumas células em  $\mathcal{I}_1$ .
- $\omega' \in I_{1, \dots, n}(\omega)$  se, e somente se,  
 $\exists \omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n, \exists i(0), i(1), \dots, i(n)$  tais que,  
 $\omega_0 = \omega, \omega_n = \omega',$

$$\omega_k \in I_{i(k-1)}(\omega_{k-1})$$

para todos os  $k > 0$ .

## TEOREMA DE ACORDO

- $B$  = um conjunto finito de decisões  $b$ ;
- $d: E \setminus \{\emptyset\} \rightarrow B$ , uma regra de decisão;
- $d$  satisfaz o princípio de certeza: se  $E = \cup_a J_a$ , onde  $\{J_a\}$  é uma família de conjuntos disjuntos, e se  $d(J_a) = b$  em cada  $a$ , então  $d(E) = b$ .

**Teorema:** para cada  $i$ , defina  $d_i: \Omega \rightarrow B$  por  $d_i(\omega) = d[I_i(\omega)]$ .

Logo,  $CK(d_1=b) \cap CK(d_2=c) \neq \emptyset \Rightarrow b = c$ .

**Prova:** Assuma  $\omega \in E: = CK(d_1=b) \cap CK(d_2=c)$ .

1.  $\exists \{J_a\} \subseteq \mathcal{J}_1$  s.t.  $E = \cup_a J_a$ .

2.  $d(J_a) = b$  para cada  $a$ .

3.  $d(E) = b$ .

## Aplicação – Concordando em discordar

- $A$  = um evento fixo
- $B = [0,1]$
- $d(E) = P(A|E)$ , probabilidade condicional com o princípio de certeza. de um  $P$  anterior comum, dado  $E$
- Regra de Bayes  $\Rightarrow d$  satisfaz o princípio de certeza.
- Teorema de Acordo  $\Rightarrow$  se for conhecimento comum em  $\omega$ , que  $P(A|I_1(\omega)) = b$  e  $P(A|I_2(\omega)) = c$ , então  $b = c$ .

## TEOREMA DE NÃO-VENDA

- $\omega = (x, z); z = (z_1, \dots, z_n), i$  observa  $z_i$ , possui  $e_i(x)$ .
- $y = \Omega \rightarrow B, y \in Y$ .
- $u_i(y_i(\omega); x) := \underline{u}_i(y_i(\omega) + e_i(x); x)$ .

**Lema:** Assuma que  $y$  seja um ótimo de Pareto, e  $y'$  e  $A \subseteq \Omega$  são tais que

$E[u_i(y'_i(\omega); x) \chi_A] \geq E[u_i(y_i(\omega); x) \chi_A]$  e  $\text{Prob}(A) > 0$ . Então,  $E[u_i(y'_i(\omega); x) \chi_A] = E[u_i(y_i(\omega); x) \chi_A]$ . Se cada  $u_i$  for estritamente côncavo, então  $y' = y$  sobre  $A$ .

**Prova:** Defina  $y^* = [y' \text{ sobre } A; y \text{ sobre } \sim A]$ . Aplique o princípio de certeza. Então,

$E[u_i(y^*(\omega); x)] \geq E[\underline{u}_i(y_i(\omega); x)]$ . Se  $E[u_i(y'_i(\omega); x) \chi_A] > E[u_i(y_i(\omega); x) \chi_A]$ , então  $E[u_i(y^*(\omega); x)] > E[u_i(y_i(\omega); x)]$ .

## TEOREMA DE NÃO-VENDA

**Teorema:** pretenda que  $\underline{y} = 0$  seja o ótimo de Pareto, e que  $\text{Prob}(I_{1, \dots, n}(\omega)) > 0$ .

Se for conhecimento comum em  $\omega$  que  $y$  seja viável e que cada  $i$  fracamente prefira  $y$  em lugar de  $\underline{y}$ , então cada um será indiferente entre  $y$  e  $\underline{y}$ . Se cada agente for estritamente avesso a risco, então  $y = \underline{y}$ .

**Prova:** Pegue  $A = I_{1, \dots, n}(\omega)$  no Lema.



## UM EXEMPLO DE EQUILÍBRIO

- $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$
- 2 JOGADORES,  $i = 1, 2$
- $I_1 = \{\{\omega_1\}, \{\omega_2\}\}$ ;
- $I_2 = \{\omega_1, \omega_2\}$ ;
- Ativo 1 dá
  - \$-1 em  $\omega_2$ .
  - \$-10 em  $\omega_1$  e
- Ativo 2 dá
  - \$-1 em  $\omega_1$  e
  - \$-10 em  $\omega_2$ .

## Espaço de estado universal

- $X$  = um alfabeto de letras  $x, y, z,$   
...
- Fórmulas: cordas finitas de símbolos tais como
  - Cada letra é uma fórmula;
  - Se  $f$  e  $g$  forem fórmulas, assim o serão  $(f) \text{ OR } (g)$ ;
  - Se  $f$  for uma fórmula, também o são  $\text{NOT}(f)$  e  $\neg$ .
- Uma *lista*  $L$  (de fórmulas) é *logicamente fechada* se, e somente se  
 $[f \in L \ \& \ (f \Rightarrow g) \in L] \Rightarrow g \in L$ ;
- Epistemicamente fechada se, e somente se  
 $F \in L \Rightarrow \neg F \in L$
- Um estado  $\omega$  é qualquer lista logicamente fechada tal como
  - $f \in \omega \Leftrightarrow \text{NOT}(f) \notin \omega$ ;
  - $\omega$  inclui todas as “tautologias”.
- $\Omega$  = o conjunto de todos os estados.
- $k_i(\omega) = \{k_i(f) \mid k_i(f) \in \omega\}$

## TAUTOLOGIAS

O conjunto de tautologias é a menor lista logicamente e epistemicamente fechada que contenha tudo:

- $(f \text{ OR } f) \Rightarrow f$
- $f \Rightarrow (f \text{ OR } g)$
- $(f \text{ OR } g) \Rightarrow (g \text{ OR } f)$
- $(f \Rightarrow g) \Rightarrow ((h \text{ OR } f) \Rightarrow (h \text{ OR } g))$
- $k_i(f) \Rightarrow f$
- $(k_i(f \Rightarrow g)) \Rightarrow (k_i(f) \Rightarrow k_i(g))$
- $k_i(f) \Rightarrow k_i(k_i(f))$
- $\text{NOT } (k_i(f)) \Rightarrow k_i(\text{NOT } (k_i(f)))$

## ALGUNS TEOREMAS

- $E_f := \{ \omega \in \Omega \mid f \in \omega \}$
- $\sim E_f = E_{\text{NOT } (f)}$
- $E_f \cup E_g = E_{(f \text{ OR } g)}$
- $E_f \cap E_g = E_{(f \& g)}$
- $K_i E_f = E_{k_i(f)}$
- $E_f \subseteq E_g \Leftrightarrow [ f \Rightarrow g \text{ é uma tautologia } ]$