

# Teoria da Barganha I

MIT 14.126, Teoria dos Jogos

Paul Milgrom

Muhamet Yildiz

1

## Teoria da Barganha

- **Cooperativa (Axiomática)**
  - **Edgeworth**
  - **Barganha de Nash (\*)**
  - **Variações de Nash**
    - **Kalai-Smorodinsky**
    - **Maschler-Perles**
    - **Igualitária-Equivalente**
    - **Utilitária,etc.**
  - **Valor de Shapley (\*)**
- **Não-cooperativa**
  - **Rubinstein-Stahl (\*)**  
(informação completa)
  - **Informação assimétrica**
    - **Rubinstein, Admati-Perry, Cramton, etc.**
  - **Antecedentes incomuns**
    - **Posner, Bazerman, Yildiz (\*),...**

2

## Problema de Barganha de Nash

- $N = \{1,2\}$  – os agentes
- $S \subset \mathbb{R}^N$  – o conjunto de pares factíveis de utilidade esperada
- $d = (d_1, d_2) \in S$  – os desfechos sem concordância
- Um *problema de barganha* é qualquer  $(S, d)$  onde
  - $S$  é compacto e convexo, e
  - $\exists x \in S$  de forma que  $x_1 > d_1$  e  $x_2 > d_2$ .
- $B$  é o conjunto de todos os problemas de barganha.
- Uma *solução de barganha* é qualquer função
 
$$f: B \rightarrow \mathbb{R}^N$$
 de forma que  $f(S,d) \in S$  para cada  $(S,d)$ .

3

## Axiomas de Nash

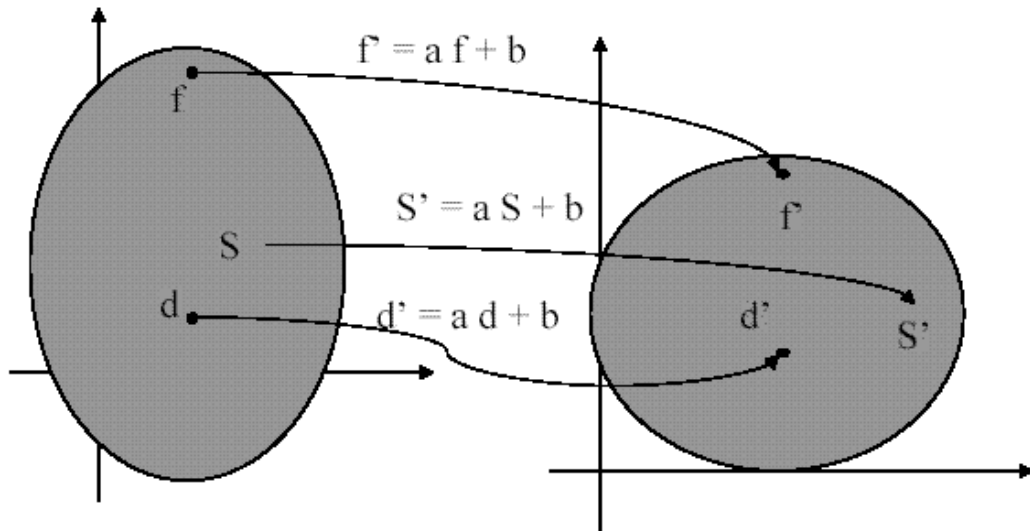
- 1. Axioma da Utilidade Esperada [EU]** (invariância sob transformações afins):  $\forall (S, d), \forall (S', d'), a_i > 0$

$$\left. \begin{array}{l} S' = \{s' \mid s'_i = a_i s_i + b_i \ \forall i \in N\} \\ d'_i = a_i d_i + b_i \ \forall i \in N \end{array} \right\} \Rightarrow f_i(S', d') = a_i f_i(S, d) + b_i \ \forall i \in N$$

- 2. Simetria [Sy]: Seja**  $(S, d)$  **simétricos:**  $d_1 = d_2$  e  $[(x_1, x_2) \in S \text{ se, e somente se } (x_2, x_1) \in S]$ . Então,  $f_1(S, d) = f_2(S, d)$ .
- 3. Independência de alternativas irrelevantes [IIA]:** se  $T \subset S$  e  $f(S, d) \in T$ , então  $f(T, d) = f(S, d)$ .
- 4. Pareto – Otimalidade [PO]:** se  $x, y \in S$  e  $y > x$ , então  $f(S, d) \neq x$ .

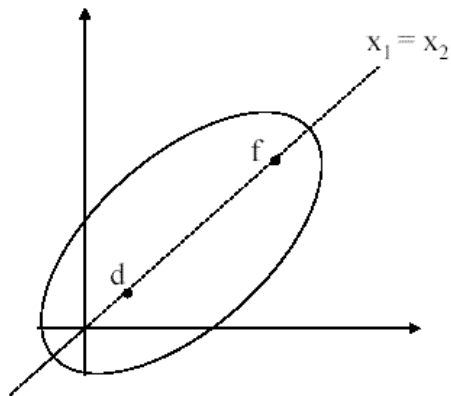
4

## Axioma da utilidade esperada



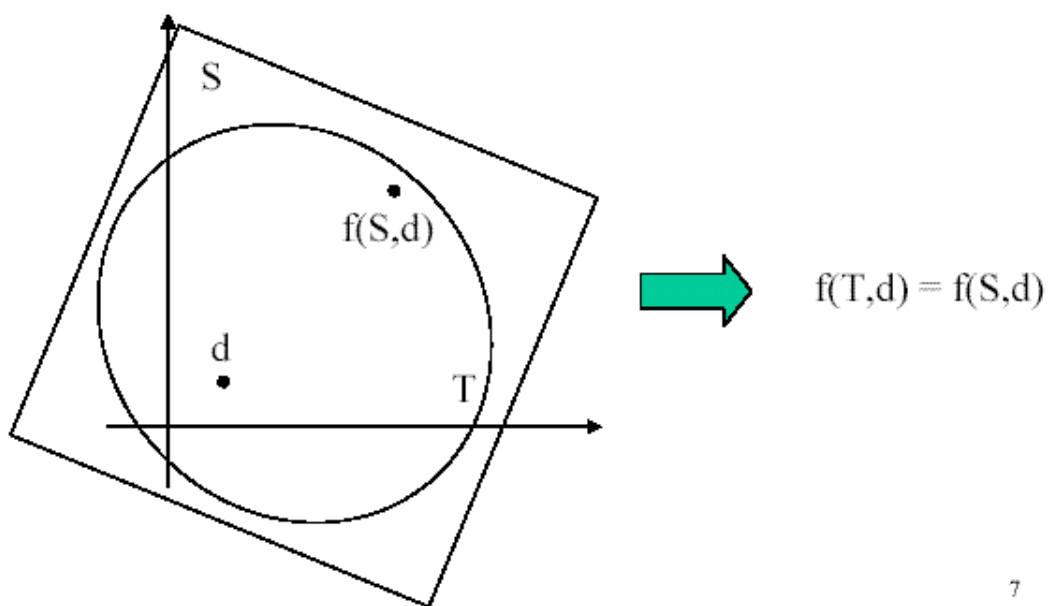
5

## Simetria



6

## Independência de alternativas irrelevantes



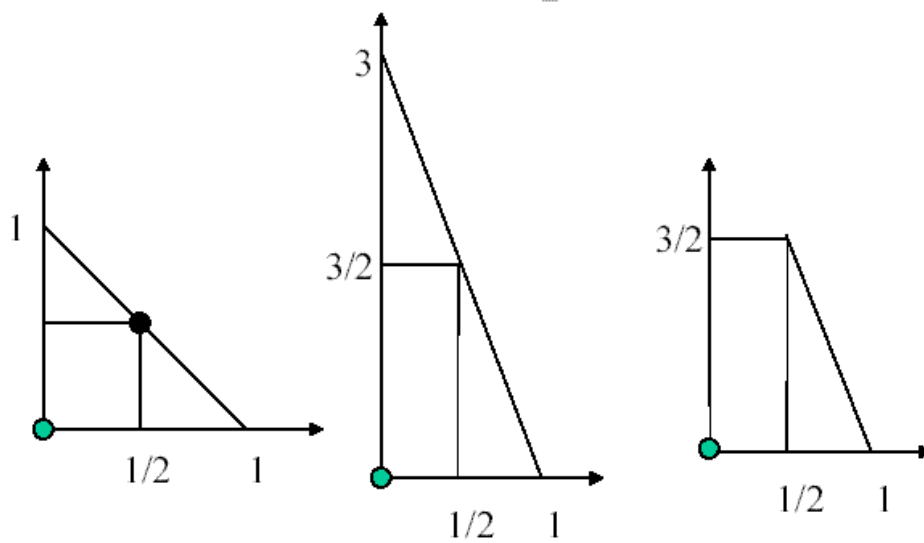
7

## Solução de Barganha de Nash

$$f^*(S,d) = \arg \max_{\substack{s \equiv (s_1, s_2) \in S \\ s > d}} (s_1 - d_1)(s_2 - d_2).$$

8

## Exemplos



$$f^*(S, d) = \arg \max_{\substack{s \equiv (s_1, s_2) \in S \\ s > d}} (s_1 - d_1)(s_2 - d_2).$$

## Teorema de Nash

**Teorema:** Uma solução de barganha  $f$  satisfaz os Axiomas de Nash (EU, Sy, IIA, PO) se, e somente se

$$f = f^*.$$

## Axiomas de Nash

1. **Axioma da Utilidade Esperada** (invariância sob transformações afins):  $\forall (S, d), \forall (S', d'), a_i > 0$

$$\left. \begin{array}{l} S' = \{s' \mid s'_i = a_i s_i + b_i \forall i \in N\} \\ d'_i = a_i d_i + b_i \forall i \in N \end{array} \right\} \Rightarrow f_i(S', d') = a_i f_i(S, d) + b_i \forall i \in N$$

2. **Simetria [Sy]:** Seja  $(S, d)$  simétricos:  $d_1 = d_2$  e  $[(x_1, x_2) \in S \text{ se, e somente se } (x_2, x_1) \in S]$ . Então,  $f_1(S, d) = f_2(S, d)$ .

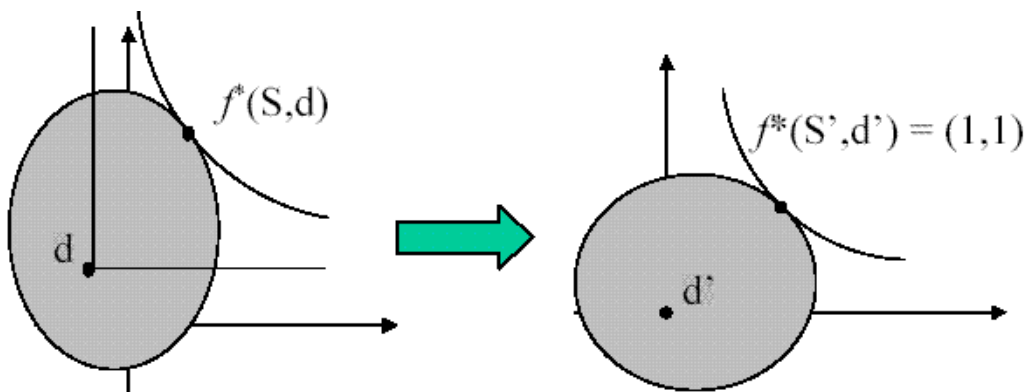
3. **Independência de alternativas irrelevantes:** se  $T \subset S$  e  $f(S, d) \in T$ , então  $f(T, d) = f(S, d)$ .

5. **Pareto – Otimalidade:** se  $x, y \in S$  e  $y > x$ , então  $f(S, d) \neq x$ .

11

## Prova do Teorema de Nash

1. Verifique:  $f^*$  satisfaz os axiomas de Nash. (fácil)
2. Pegue quaisquer  $(S, d)$ . Transforme-os em  $(S', d')$  de forma que  $d' = 0$ , e  $f^*(S', d') = (1, 1)$ . Sob [Sy, IIA, PO],  $f(S', d') = f^*(S', d') = (1, 1)$ . &EU  $\Rightarrow f(S, d) = f^*(S, d)$ . CQD



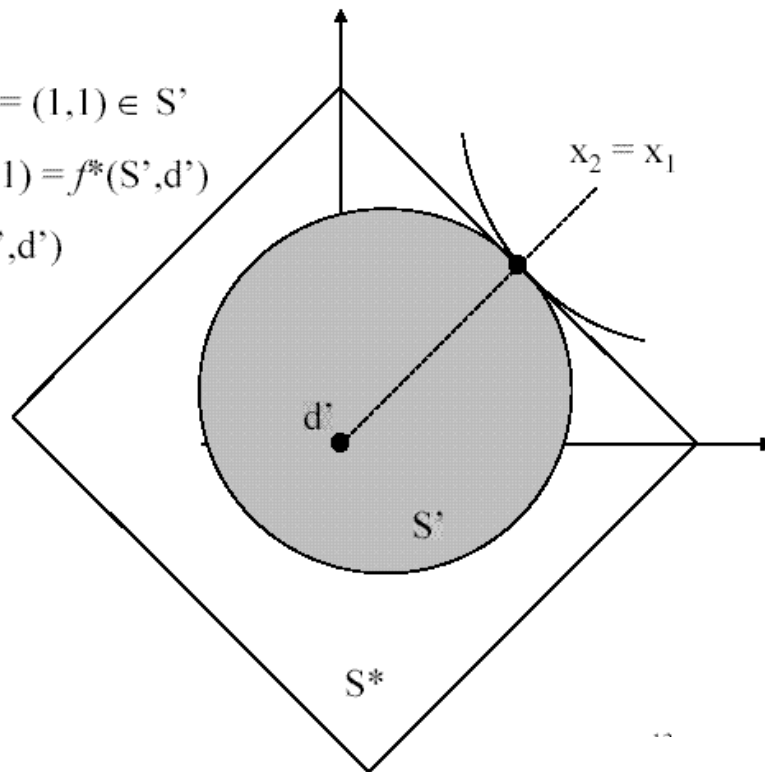
12

- $S^*$  é simétrico. (como)

- $Sy \& PO \Rightarrow f(S^*, d') = (1,1) \in S'$

- $IIA \Rightarrow f(S', d') = (1,1) = f^*(S', d')$

- $EU \Rightarrow f(S, d) = f^*(S', d')$



13

## Uma extensão de Nash

**5. Racionalidade Individual [IR]:**  $f(S, d) \geq d$ .

**Teorema:** Há exatamente duas soluções de barganha que satisfazem os axiomas EU, Sy, IIA e IR:

$f^*$  e  $D$  com  $D(., d) \equiv d$ .

**Prova:**  $[EU \& IIA \& IR] \Rightarrow (PO \text{ ou } D(., d) \equiv d)$ . CQD

14

## Nash Assimétrico

Teorema: Seja  $A = \{x \geq 0 \mid x_1 + x_2 \leq 1\}$ . Para qualquer  $a$  em  $(0,1)$ , há uma única solução de barganha  $f^a$  que satisfaz os Axiomas EU, IIA e IR, e  $f^a(A,0) = (a, 1-a)$ ;

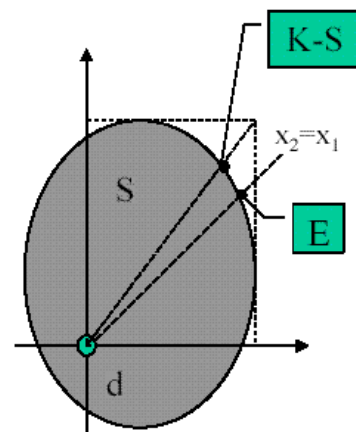
$$f^a(S, d) = \arg \max_{s \in S, s \geq d} (s_1 - d_1)^a (s_2 - d_2)^{1-a}$$

15

## Variações de Nash

Alterando os axiomas de Nash, muitos caracterizaram soluções de barganhas variadas, com axiomas variados. Por exemplo:

1. Kalai-Smorodinsky
  - Monotonicidade, EU, Sy, PO
2. Igualitário:
 
$$\max \min \{x_1, x_2\}$$
3. Utilitário:  $\max ax_1 + bx_2$



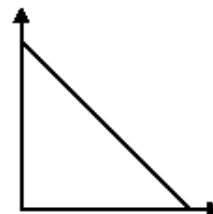
16



## Valor de Shapley – barganha de n pessoas

- Um jogo de coalizão  $(N, v)$ , onde  $v: 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ .  
 $v(S)$  é a utilidade total máxima que a coalizão  $S$  pode obter em caso de discordância com  $N \setminus S$ .
- Uma *solução de barganha* (ou *valor*) é qualquer função  $f$  que atribua uma alocação  $f(S, v)$  em  $\mathbb{R}^S$  para cada coalizão  $S$ , onde  $\sum_i f_i(S, v) = v(S)$ .
- A *contribuição marginal* de  $i$  para  $S$  com  $i \notin S$  é

$$D_i(S) = v(S \cup \{i\}) - v(S).$$



17

## Valor de Shapley – definição

- Uma coalizão  $S_i = \{1, 2, \dots, i\}$ 
  - formado na ordem  $\{1\} \rightarrow \{1, 2\} \rightarrow \{1, 2, 3\} \rightarrow \dots \rightarrow \{1, 2, \dots, i-1\} \rightarrow \{1, 2, \dots, i-1, i\}$ ;
  - o último a chegar tem todo o poder de barganha.
- Então,  $f_1(S_i, v) = v(\{1\})$ ,  
 $f_2(S_i, v) = D_2(\{1\}) = v(\{1, 2\}) - v(\{1\})$ , ... ,  
 $f_i(S_i, v) = D_i(S_{i-1}) = v(\{1, 2\}) - v(\{1\})$ .
- Coalizão  $S$ 
  - formada em uma ordem aleatória onde cada permutação é igualmente provável – há  $|S|!$  Permutações;
  - o último a chegar tem todo o poder de barganha.
- Então, o valor de Shapley ( $j$ ):  

$$\varphi_j(S, v) = \frac{1}{|S|!} \sum_R D_j(S_i(R))$$

onde  $R$  é qualquer permutação,  
 $S_i(R) = \{R(1), R(2), \dots, i\}$ .

18

## Exemplo – Firma

- $N = \{c\} \cup W$ ;  $c$  tem uma fábrica;  $w \in W$  é um trabalhador. Sem  $c$ , os trabalhadores produzem 0; com  $c$ ,  $m$  trabalhadores produzem  $p(m)$ ;  $p$  é côncavo, crescente e  $p(0) = 0$ .
- $v(S) = p(|S \cap W|)$  se  $c \in S$ ;  $v(S) = 0$  caso contrário [O&R;259.3]
- $\varphi(c) = \varphi(\emptyset) = 0$ ;
- $A_m = \{c, w_1, w_2, \dots, w_m\}$
- $\varphi_c(A_m) = (p(1) + \dots + p(m))/(m+1)$ ;
- $\varphi_w(A_m) = (p(m) - \varphi_c(A_m))/m$ .

19

## Exemplo – Mercado

- $N = \{1, 2, 3\}$ ; 1 é o vendedor; 2 e 3 são compradores:
- $v(i) = 0$ ;  $v(1, 2) = v(1, 3) = v(1, 2, 3) = 1$ ;  $v(2, 3) = 0$ .
- $\varphi_i(i) = 0$ ;  $\varphi_1(1, i) = \varphi_i(1, i) = 1/2$ ;  $\varphi_i(2, 3) = 0$ ;  
 $\varphi_1(1, 2, 3) = 2(0 + 1 + 1)/3! = 2/3$ ;  
 $\varphi_2(1, 2, 3) = \varphi_3(1, 2, 3) = 1/3! = 1/6$ .

[o preço é  $2/3$  e os compradores têm igual probabilidade de compra]

- $\text{Núcleo}(N, v) = \{(1, 0, 0)\}$ .

20

## Valor de Shapley e o Núcleo

**Teorema:** Para qualquer jogo convexo  $(N, v)$ , o valor de Shapley  $(\phi)$  está no núcleo.

### Prova:

1. Como  $(N, v)$  é convexo,  $\forall$  perm.  $R$ ,  $g_i^R(N, v) = D_i(S_i(R))$  está no Núcleo (aula anterior).
2. Valor de Shapley é a média dos  $g^R$ 's:  $\phi = \sum_R g^R / |N|!$
3. O Núcleo é convexo.
4. O valor de Shapley está no Núcleo. CQD

21

## Axiomas de Shapley

1. **Simetria:** Se  $i$  e  $j$  são intercambiáveis (ou seja,  $D_i = D_j$ ), então

$$f_i(., v) = f_j(., v)$$

2. **Fictício:** Se  $i$  é fictício (ou seja,  $D_i = v(\{i\})$ ), então

$$f_i(., v) = v(\{i\}).$$

3. **Aditividade:**  $f(., v+w) = f(., v) + f(., w)$ .

22

## Teorema (Shapley)

O valor de Shapley ( $j$ ) é a única solução de barganha (ou valor) que satisfaz aos axiomas de Shapley (a saber, simetria, fictício e aditividade).

### Prova:

1. Verifique:  $\phi$  satisfaz os axiomas de Shapley.
2. Há um único valor  $f$  que satisfaz os axiomas de Shapley. CQD

23

## Prova (Etapa 2)

1. Estabeleça um  $N$  fixo. Então,  $(N, v) \equiv v \in R^{2^{|N|}-1}$ .
2. Defina  $v_T$  por  $v_T(S) = 1$  se  $S \subseteq T$ ; caso contrário,  $v_T(S) = 0$ .
3.  $(v_T)_{\emptyset \neq T \subseteq N}$  é uma base para  $R^{2^{|N|}-1}$ :
  1. Suponha que  $\sum_S b_S v_S$ , mas  $b_T \neq 0$ .
  2.  $\exists T^* \subseteq T$ , de forma que  $b_{T^*} \neq 0$  &  $b_{T'} = 0 \ \forall T' \subset T^*$ .
  3.  $\sum_S b_S v_S(T^*) = b_{T^*} \neq 0$ , uma contradição.
4.  $\forall v \in R^{2^{|N|}-1}$ ,  $\exists$  um único  $b \in R^{2^{|N|}-1}$  de forma que  $v = \sum_S b_S v_S$ .
5.  $A1 \& A2 \Rightarrow f_i(\alpha v_T) = \alpha/|T|$  se  $i \in T$ ; caso contrário, 0.
6.  $\& A3 \Rightarrow f_i(v) = f_i(\sum_S b_S v_S) = \sum_S f_i(b_S v_S) = \sum_{S \ni i} b_S/|S|$ .

24

## Contribuições Balanceadas

Um valor  $f$  satisfaz a propriedade de contribuições balanceadas sse,  $\forall (N,v), \forall i,j \text{ em } N$ ,

$$f_i(N,v) - f_i(N \setminus \{i\}) = f_j(N,v) - f_j(N \setminus \{j\}).$$

**Teorema:** O valor de Shapley é a única solução de barganha que satisfaz a propriedade de contribuições balanceadas.

Prova: 1. Se  $f$  e  $f'$  satisfazem a propriedade, então  $f = f'$ .  
2. O valor de Shapley satisfaz a propriedade. CQD