

Leilões 1:

Leilões comuns e
Equivalência de receitas

Sergei Izmalkov e Mahamet Yildiz

Roteiro

1. Leilões simples: definições e análise de equilíbrio.
2. Equivalência de receitas.
3. Leilões ótimos.
4. Saídas a partir da definição do VPIV simétrico: classificação de receitas, princípio de ligação.
5. Leilão inglês e eficiência.
6. Conluio em leilões.
7. Leilões de unidades múltiplas.

1. Características notáveis dos leilões

- Antigo mecanismo do “mercado”.
- Amplo uso. Diversas variedades.
- Jogos simples e transparentes (mecanismos).
- Opera bem nos ambientes de informação incompleta. O vendedor (e algumas vezes também os licitantes) não sabe qual valor os outros estão atribuindo ao objeto.
- Otimização e eficiência em uma ampla série de situações.
- Provavelmente a área mais ativa de pesquisa em economia.

2 Notação (VPI Simétrico)

Estabelecimento de valores privados independentes (VPI) com compradores de risco neutro simétricos, sem restrições de orçamento.

- Único objeto indivisível para venda.
- N compradores potenciais, indexados por i . N comumente conhecido por todos os licitantes.
- X_i – avaliação do comprador i – valor máximo que está disposto a pagar pelo objeto.
- $X_i \sim F$ $[0, ?]$ com $f = F'$ contínuo e suporte total.
- X_i é valor privado (sinal); todos os X_i são *iid* (independentes e identicamente distribuídos), o que é de conhecimento comum.

3 Leilões comuns

Leilões de LANCES FECHADOS.

- Leilão de lances fechados e primeiro preço:
Cada licitante submete um lance $b_i \in \mathbb{R}$ (em envelope lacrado ou sem a observação dos demais). O ganhador é o comprador com o maior lance, ele paga o seu lance.
- Leilão de lances fechados e segundo preço:
Como acima, o ganhador paga o segundo lance mais alto — o mais alto entre os lances dos demais participantes.
- Leilão de K-ésimo preço:
O ganhador paga o K-ésimo preço mais alto.

Leilões ABERTOS (DINÂMICOS).

- Leilão holandês:

O preço inicial é fixado em um valor elevado, que nenhum licitante está disposto a pagar. Ele vai sendo reduzido até que algum licitante informe que está disposto a comprar. O licitante obtém o objeto a esse preço.

Observação: Os leilões holandês e de primeiro preço são amplamente equivalentes.

- Leilão inglês:

O preço do objeto começa em zero e vai aumentando. Os licitantes começam ativamente – dispostos a comprar o objeto a preço zero. Em um determinado valor, cada participante está disposto (ativo) ou não (inativo) a comprar o objeto por esse preço. Conforme o preço aumenta, os licitantes reduzem(*) suas demandas. O leilão pára quando apenas um licitante continua ativo. Ele é o ganhador e paga o preço que fez os outros interromperem suas ofertas.

Observação: O leilão inglês é , de certa forma, equivalente ao leilão de segundo preço.

4 Leilão de primeiro preço

Vantagem

$$\Pi_i = \begin{cases} x_i - b_i, & \text{se } b_i > \max_{j \neq i} b_j, \\ \text{caso contrário, } 0. \end{cases}$$

Proposição: As estratégias de equilíbrio simétrico em leilão de primeiro preço são dadas por

$$\beta^1(x) = E[Y_1 | Y_1 < x],$$

onde $Y_1 = \max_{j \neq i} \{X_j\}$.

Prova: É fácil verificar que trata-se de estratégia de equilíbrio, vamos derivá-la.

Suponha que cada outro licitante exceto i siga a estratégia estritamente crescente (e diferenciável) $\beta(x)$.

Compromisso de equilíbrio: O ganho de vencer *versus* a probabilidade de vencer.

A vantagem esperada de apresentar lances b ao receber x_i é: $G_{Y_1}(\beta^{-1}(b)) \times (x_i - b)$.

CPO:
$$\frac{g(\beta^{-1}(b))}{\beta'(\beta^{-1}(b))}(x - b) - G(\beta^{-1}(b)) = 0.$$

No equil $G(x)\beta'(x) + g(x)\beta(x) = xg(x),$ CPO \Rightarrow

$$\frac{d}{dx}(G(x)\beta(x)) = xg(x),$$

$$\beta(x) = \frac{1}{G(x)} \int_0^x yg(y)dy,$$

$$= E[Y_1 | Y_1 < x].$$

No leilão de primeiro preço, o pagamento esperado é

$$m^1(x) = \Pr[\text{vencedor}] \times b(x)$$

$$= G(x) \times E[Y_1 | Y_1 < x].$$

5 Exemplos:

1. Suponha que os valores sejam uniformemente distribuídos em $[0,1]$.

$$F(x) = x, \text{ então } G(x) = x^{N-1} \text{ e}$$

$$\beta^I(x) = \frac{N-1}{N}x.$$

2. Suponha que os valores sejam exponencialmente distribuídos em $[0,\infty)$.

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \text{ para algum } \lambda > 0 \text{ e } N = 2, \text{ então}$$

$$\begin{aligned}\beta^I(x) &= x - \int_0^x \frac{F(y)}{F(x)} dy \\ &= \frac{1}{\lambda} - \frac{x e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda x}}.\end{aligned}$$

Observe que se, para $\lambda = 2$, x é muito grande e o lance não ultrapassará 50 centavos.

6 Leilão de segundo preço

Proposição: Em um leilão de lance fechado e segundo preço, é uma estratégia dominante fraca fazer um lance

$$\beta^{\text{II}}(x) = x.$$

No leilão de segundo preço, o pagamento esperado do ganhador com valor x é o valor esperado do segundo lance mais alto dado x , que é a expectativa do segundo valor mais alto dado x .

Assim, o pagamento esperado no leilão de segundo preço é

$$\begin{aligned} m^{\text{I}}(x) &= \Pr[\text{Win}] \times E[Y_1 | Y_1 < x] \\ &= G(x) \times E[Y_1 | Y_1 < x]. \end{aligned}$$