

Jogos Supermodulares

Sergei Izmalkov e Muhamet
Yildiz

(agradecimentos a Jonathan Levin)

1 Estática comparativa monotonal

Suponha que $X \subset \mathbf{R}$ e T seja parcialmente ordenado.

Definição: Uma função $f: X \times T \rightarrow \mathbf{R}$ possui diferenças crescentes em (x, t) se para todo $x' \geq x$ e $t' \geq t$,

$$f(x', t') - f(x, t') \geq f(x', t) - f(x, t)$$

Assim, $f(x', t) - f(x, t)$ é não-decrescente em t .

Simetria: $f(x, t') - f(x, t)$ é não-decrescente em x .

Lema: Se $f \in C^2$, então f possui diferenças crescentes $\Leftrightarrow t' \geq t$ implica $f_x(x, t') \geq f_x(x, t)$ para todo x , ou seja,

$$f_{xt}(x, t) \geq 0 \text{ para todo } x, t.$$

Defina

$$x(t) = \arg \max_{x \in X} f(x, t).$$

Teorema 1: (Topkins) Suponha que $X \subset \mathbf{R}$ seja um compacto e T seja parcialmente ordenado. Suponha que $f: X \times T \rightarrow \mathbf{R}$ possua diferenças crescentes e seja semi-contínuo superior em x . Então,

(i) para todo t , $x(t)$ existe, e possui os elementos maiores e menores $\bar{x}(t)$ e $\underline{x}(t)$;

(ii) para $t' \geq t$, $x(t') \geq x(t)$, em um sentido $\bar{x}(t') \geq \bar{x}(t)$
 $\underline{x}(t') \geq \underline{x}(t)$.

2 Modelos em Lattice

Suponha que X é um conjunto parcialmente ordenado com ordem \geq .

(pense como $X \subset \mathbf{R}^n$ e $x \geq y \Leftrightarrow x_i \geq y_i$ para todo $i = 1, \dots, n$.)

Defina

$$\text{"juntar"} : \quad x \vee y = \inf\{z \in X : z \geq x, z \geq y\},$$

$$\text{"encontrar"} : \quad x \wedge y = \sup\{z \in X : z \leq x, z \leq y\}.$$

Em \mathbf{R}^n ,

$$(x \vee y)_i = \max(x_i, y_i),$$

$$(x \wedge y)_i = \min(x_i, y_i).$$

Definição: (X, \leq) é um sub-lattice se estiver fechado sob \vee e \wedge .

3 Funções supermodulares

Definição: a função de payoff u_i é supermodular em x_i se, para cada $x_{-i} \in X_{-i}$ e $x_i, x'_i \in X_i$,

$$u(x_i, x_{-i}) + u(x'_i, x_{-i}) \leq u(x_i \vee x'_i, x_{-i}) + u(x_i \wedge x'_i, x_{-i}).$$

Observe: Se $x_i \geq x'_i$ a supermodularidade (comparável) é trivialmente satisfeita.

Definição: a função de payoff u_i é supermodular em x_i se, para todo $x, x' \in X_i$,

$$u_i(x \vee x') + u_i(x \wedge x') \geq u_i(x) + u_i(x').$$

Teorema: Supermodularidade \Rightarrow supermodularidade em x_i e diferenças crescentes.

4 Jogos supermodulares

Jogos com “complementaridades estratégicas”.

Definição: o jogo $(S_1, \dots, S_I, u_1, \dots, u_I)$ é um jogo supermodular se para todo i : (definição geral em colchetes)

- S_i for um subconjunto compacto de \mathbf{R} (S_i é um sub-lattice);
- u_i é semi-contínuo superior em s_{-i} (u_i é supermodular em s_i);
- u_i tem diferenças crescentes em (s_{-i}) .

Teorema 2: Suponha que (S, u) é um jogo supermodular, seja

$$BR_i(s_{-i}) = \arg \max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i}).$$

Então,

(i) $BR_i(s_{-i})$ tem o maior e o menor elemento, $\overline{BR}_i(s_{-i})$ e $\underline{BR}_i(s_{-i})$.

(ii) Se $s'_{-i} \geq s_{-i}$, então $\overline{BR}_i(s'_{-i}) \geq \overline{BR}_i(s_{-i})$ e $\underline{BR}_i(s'_{-i}) \geq \underline{BR}_i(s_{-i})$.

5 Exemplos

5.1 Jogo de investimento

As firmas $1, \dots, I$ fazem investimentos simultâneos $s_i \in \{0, 1\}$ e os payoffs são:

$$u_i(s_i, s_{-i}) = \begin{cases} \pi \left(\sum_{j=1}^I s_j \right) - k & \text{se } s_i = 1, \\ 0, & \text{if } s_i = 0, \end{cases}$$

Onde π é crescente.

5.2 Concorrência de Bertrand

As firmas $1, \dots, I$ escolhem preços simultaneamente e

$$D_i(p_i, p_{-i}) = a_i - b_i p_i + \sum_{j \neq i} d_{ij} p_j,$$

onde $b_i d_{ij} \geq 0$. Então, $S_i = \mathbb{R}_+$ e

$$\begin{aligned}\pi_i(p_i, p_{-i}) &= (p_i - c_i) D_i(p_i, p_{-i}), \\ \frac{\partial^2 \pi_i}{\partial p_i \partial p_j} &= d_{ij} \geq 0.\end{aligned}$$

5.3 Concorrência de Cournot

O oligopólio de Cournot é supermodular somente se $N = 2$ e $s_1 = q_1, s_2 = -q_2$.

5.4 Modelo de busca de Diamond

I agentes exercem um esforço de busca por parceiros comerciais:

e_i e $c(e_i)$ – esforço e custo do esforço para o agente i ,

$$u_i(e_i, e_{-i}) = e_i \cdot \sum_{j \neq i} e_j - c(e_i)$$

tem diferenças crescentes em e_i, e_{-i} .

6 Resolvendo o jogo de Bertrand.

Suponha que há 2 firmas, $D_i(p_i, p_j) = 1 - 2p_i + p_j$, e $c = 0$. Suponha que $S_i^0 = [0, 1]$.

$$\begin{aligned}\pi_i(p_i, p_{-i}) &= p_i(1 - 2p_i + p_j), \\ \frac{\partial \pi_i(p_i, p_{-i})}{\partial p_i} &= 1 - 4p_i + p_j.\end{aligned}$$

A eliminação repetida das estratégias estritamente dominadas fornece:

- Qualquer $p_i < 1/4$ é estritamente dominado por $p_i = 1/4$; qualquer $p_i > 1/2$ é estritamente dominado por $p_i = 1/2$.

Assim, $S_i^1 = [1/4, 1/2]$. Observe que $S_i^1 = BR_i(S_j^0)$.

- Repetindo o procedimento, temos $S_i^k = BR_i(S_j^{k-1})$.
- Converge para o ponto $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

7 Resultado Principal

Teorema 3: Seja (S, u) um jogo supermodular. Então o conjunto de estratégias que sobrevivem à estrita dominação repetitiva tem o maior e o menor elemento s^- e s^+ ; s^- e s^+ são ambos equilíbrios de Nash.

Corolário:

1. O equilíbrio de Nash de estratégia pura existe em jogos supermodulares.
2. As estratégias maior e menor compatíveis com a estrita dominação repetitiva, racionalidade, equilíbrio correlato e equilíbrio de Nash são as mesmas.
3. Se um jogo supermodular tem um único equilíbrio de Nash, então ele é solucionável por dominação (e assim várias regras de aprendizado ou de ajuste irão convergir para ele (por ex., dinâmica da melhor resposta)).

7.1 Prova do Teorema 3

- Mapeamento iterativo de melhor resposta.
- $S^0 = S$; $s^0 = (s_1^0, \dots, s_I^0)$ – maior elemento em S^0 .

$$s_i^1 = \overline{BR}_i(s_{-i}^0); S_i^1 = \{s_i \in S_i^0 : s_i \leq s_i^1\}.$$

- Qualquer $s_i \notin S_i^1$ é dominado por s_i^1 pois

$$\begin{aligned} & u_i(s_i, s_{-i}) - u_i(s_i^1, s_{-i}) \\ & \leq u_i(s_i, s_{-i}^0) - u_i(s_i^1, s_{-i}^0) < 0. \end{aligned}$$

- $s_i^k = \overline{BR}_i(s_{-i}^{k-1}); S_i^k = \{s_i \in S_i^{k-1} : s_i \leq s_i^k\}.$

$$\begin{aligned} s_i^k & \leq s_i^{k-1} \implies \\ s_i^{k+1} & = \overline{BR}_i(s_{-i}^k) \geq \overline{BR}_i(s_{-i}^{k-1}) = s_i^k. \end{aligned}$$

- Defina

$$\bar{s}_i = \lim_{k \rightarrow \infty} s_i^k.$$

Apenas as estratégias $s_i \leq \bar{s}_i$ são não dominadas.

- $\bar{s} = (\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_I)$ – um equilíbrio de Nash, de fato

$$\begin{aligned} u_i(s_i^{k+1}, s_{-i}^k) &\geq u_i(s_i, s_{-i}^k), \\ u_i(\bar{s}_i, \bar{s}_{-i}) &\geq u_i(s_i, \bar{s}_{-i}). \end{aligned}$$

- Analogamente, defina $s^0 = (s_1^0, \dots, s_I^0)$ – o menor elemento em S^0 ;

$s_i^1 = \underline{BR}(s_{-i}^0)$; $S_i^1 = \{s_i \in S_i^0 : s_i \geq s_i^1\}$ e assim por diante...

- Obtenha $\underline{s} = (\underline{s}_1, \dots, \underline{s}_I)$, prove que se trata de um Equilíbrio de Nash.

8 Propriedades dos jogos supermodulares

Idéia: Use a monotonicidade para obter resultados de estática comparativos.

- Um *jogo supermodular* (S, u) é indexado por t se a função de *payoff* de cada jogador for indexada por $t \in T$, um conjunto ordenado, e para todo i , $u_i(s_i, s_{-i}, t)$ possui diferenças crescentes em (s_i, t) .

Proposição: Suponha que (S, u) é um jogo supermodular indexado por t . Os maiores e menores equilíbrios de Nash são crescentes em t .

- Um *jogo supermodular* (S, u) possui transbordamentos positivos se para todo i , $u_i(s_i, s_{-i})$ for crescente em s_{-i} .

Proposição: Suponha que (S, u) é um jogo supermodular com transbordamentos positivos. Então o maior equilíbrio de Nash é o preferido de Pareto.