

Aprendizagem 4

Modelagem com ruído permanente

Sergei Izmalkov e Muhamet Yildiz

1. Idéia Principal

- Sempre haverá uma pequena, mas positiva, probabilidade de mutação.
- Um modelo mais apropriado se as mutações forem reais e recorrentes.
- Alguns dos equilíbrios de Nash estritos não serão “estocasticamente estáveis”.

2. Modelagem estocástica

Procedimento geral:

1. Considere um jogo.

	A	B
A	2,2	0,0
B	0,0	1,1

Uma pessoa de tipo i da população i , $i=1,2$.

2. Especifique um espaço de estado Θ , por exemplo, o número de jogadores aplicando cada estratégia.

$$\Theta = \{AA, AB, BA, BB\}.$$

3. Especifique uma dinâmica de ajustamento “intencional” ou “imperturbada”, por exemplo, dinâmicas de melhor resposta, com uma matriz de transição P , na qual

$$P_{\theta, \xi} = \Pr(\theta \text{ at } t+1 | \xi \text{ at } t).$$

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} AA & AB & BA & BB \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} AA \\ AB \\ BA \\ BB \end{matrix} \end{matrix}$$

Note que há um ciclo duplo entre (AB) e (BA) .

4. Introduza um pequeno ruído: equívocos, mutações, etc...

Considere P^ε , contínuo em ε e $P^\varepsilon \rightarrow P$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Certifique-se que P^ε é ergódico:

(a) Existe um único ϕ^* (uma distribuição de probabilidades, um vetor coluna), de forma que:

$$\phi^* = \Pi \phi^*.$$

(b) As médias temporais convergem

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \right) \sum_t I(\theta_t = \theta) = \phi^*(\theta).$$

(c) As distribuições de data t convergem

$$\forall \phi, \lim_{t \rightarrow \infty} \Pi \phi = \phi^*.$$

Condições suficientes para ergodicidade:

5. $\Pi > 0$, ou $\Pi^n > 0$ para algum n .

$\exists \theta$, de modo que $\Pi_{\theta\theta} > 0$, e é alcançado a partir de qualquer outro estado para algum n .

No exemplo:

$$P^\varepsilon = \begin{array}{cccc} & \begin{matrix} \text{AA} & \text{AB} & \text{BA} & \text{BB} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} (1-\varepsilon)^2 & (1-\varepsilon)\varepsilon & (1-\varepsilon)\varepsilon & \varepsilon^2 \\ (1-\varepsilon)\varepsilon & \varepsilon^2 & (1-\varepsilon)^2 & (1-\varepsilon)\varepsilon \\ (1-\varepsilon)\varepsilon & (1-\varepsilon)^2 & \varepsilon^2 & (1-\varepsilon)\varepsilon \\ \varepsilon^2 & (1-\varepsilon)\varepsilon & (1-\varepsilon)\varepsilon & (1-\varepsilon)^2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \text{AA} \\ \text{AB} \\ \text{BA} \\ \text{BB} \end{matrix} \end{array}$$

$$\phi_\varepsilon^* = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right)^T.$$

6. Verifique que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \phi_\varepsilon^* = \phi^*$ existe; calcule ϕ^* .

(Por continuidade $\phi^* = P\phi^*$.)

7. Prove que ϕ^* é um ponto de massa, isto é,

$$\phi^*(\theta^*) = 1$$

para algum θ^* .

O perfil de estratégia em θ^* é chamado de equilíbrio estocasticamente estável.