

Aprendizagem 2 :

Dinâmica de replicador e estabilidade evolucionária

Roteiro

1. Estratégias evolucionárias estáveis
2. Dinâmica de replicador

1. Notação

- $G = (S, A)$ um jogo simétrico com 2 jogadores, no qual
- S é o espaço da estratégia;
- $A_{i,j} = u_1(s_i, s_j) = u_2(s_j, s_i)$;
- $x, y \in ?$ são estratégias mistas; $u(x, y) = x^T A y$;
- $u(ax + (1 - a)y, z) = au(x, z) + (1 - a)u(y, z)$.

2. Estabilidade de evolução

- Cada jogador é dotado de uma estratégia (população/ estratégia mutante).
- Não há explicação de como a população chega a tal estratégia.
- Verifique se uma estratégia é robusta para pressões evolucionárias.
- Desconsidere os efeitos nas ações futuras.

3. ESS

Definição: uma estratégia (mista) x é dita evolucionariamente estável se para todo $y \neq x$ existir um $\epsilon_y > 0$ s.t.

$$u(x, (1 - \epsilon)x + \epsilon y) > u(y, (1 - \epsilon)x + \epsilon y),$$

para cada ϵ em $(0, \epsilon_y]$.

Fato: x é evolucionariamente estável se e somente se $\forall y \neq x$,

1. $u(x, x) \geq u(y, x)$, e

2. $u(x, x) = u(y, x) \implies u(x, y) > u(y, y)$.

Prova: defina a *função da contagem*

$$\begin{aligned} F_x(\epsilon, y) &= u(x, (1 - \epsilon)x + \epsilon y) - u(y, (1 - \epsilon)x + \epsilon y) \\ &= u(x - y, x) + \epsilon u(x - y, y - x). \end{aligned}$$

ESS $\iff F_x(\epsilon, y) > 0$ para $\epsilon \in (0, \epsilon_y]$.





4. ESS vs NE

- Se $x \in \Delta^{ESS}$, então (x, x) é NE ($x \in \Delta^{NE}$).

De fato: (x, y) é o próprio NE.

- (x, x) é um NE estrito $\Rightarrow x$ é ESS por padronização.
- NE Interior pode não ser ESS.

5. Jogo do Falcão - Pomba

		
	$\left(\frac{V-c}{2}, \frac{V-c}{2}\right)$	$(V, 0)$
	$(0, V)$	$(V/2, V/2)$

Exemplo: Para $V = 4, c = 6; x = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ — NE; $\forall y \in \Delta, y \in BR(x)$.

$$u(x - y, y) = (x_1 - y_1)(2 - 3y_1) = \frac{1}{3}(2 - 3y_1)^2,$$

então x é ESS.

6. Jogo da pedra-tesoura-papel

	R	S	P
R	0,0	1,-1	-1,1
S	-1,1	0,0	1,-1
P	1,-1	-1,1	0,0

- Equilíbrio de Nash Único (s^*, s^*) ,
onde $s^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.
- s^* não é ESS. $(u(s^* - R, R) = 0)$.

7. ESS em jogos de interpretação

- Dados (S^1, S^2, u_1, u_2) , considere um jogo simétrico (S, u) , onde
 - $S = S^1 \times S^2$;
 - para $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in S$

$$u(x, y) = \frac{1}{2}[u_1(x_1, y_2) + u_2(x_2, y_1)].$$

Teorema: x é ESS de (S, u) se e somente se x é NE estrito de (S^1, S^2, u_1, u_2) .

8. Dinâmica do Replicador

- Mecanismo de seleção
- $p_i(t)$ = número de pessoas que jogam s_i em t .
- $p(t)$ = população total em t .
- $x_i(t) = \frac{p_i(t)}{p(t)}$; $x(t) = (x_1(t), \dots, x_k(t))$.
- $u(x, x) = \sum_i x_i u(s_i, x)$.
- Replicadores são estratégias puras

$$\dot{p}_i = [\beta + u(s_i, x) - \delta] p_i.$$

- $\dot{x}_i = [u(s_i, x) - u(x, x)] x_i = u(s_i - x, x) x_i$.

9. Observações

•

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{x_i}{x_j} \right] &= \frac{\dot{x}_i}{x_j} - \frac{x_i \dot{x}_j}{x_j x_j} \\ &= \left[u(s_i, x) - u(s_j, x) \right] \frac{x_i}{x_j}. \end{aligned}$$

- Se u torna-se $u' = au + b$, então a dinâmica do replicador torna-se

$$\dot{x}_i = au(s_i - x, x) x_i.$$

9.1 Jogos 2 x 2

Considere (S, A) , em que $A = \begin{bmatrix} a_1, a_1 & 0, 0 \\ 0, 0 & a_2, a_2 \end{bmatrix}$.

Temos

$$u(s_i, x) = a_i x_i;$$

$$u(x, x) = (x_1, x_2)A(x_1, x_2)^T = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2;$$

$$u(s_1 - x, x) = (a_1 x_1 - a_2 x_2)x_2.$$

e então

$$\dot{x}_1 = (a_1 x_1 - a_2 x_2)x_1 x_2.$$

9.2 Classificação

1. $a_1 a_2 < 0$. Então

- $x_1 \rightarrow_t 0$ quando $a_1 < 0$;
- $x_1 \rightarrow_t 1$ quando $a_1 > 0$.

2. Se $a_1 a_2 > 0$; defina $\lambda = \frac{a_2}{a_1 + a_2}$, $(\lambda, 1 - \lambda)$ é NE.

Então

- $x_1 = \lambda$ é estável se $a_1 < 0$;
- $x_1 = \lambda$ é instável se $a_1 > 0$.

Compare com ESS.

Exemplos: Dilema do Prisioneiro, Jogo do Frango, Jogo da Coordenação, Guerra dos Sexos, ...

10. Racionalizabilidade

- $\xi(t, x_0)$ é a solução para a dinâmica do replicador começando em x_0 .

Teorema: se uma estratégia pura i é estritamente dominada (por y), então $\lim_t \xi_i(t, x_0) = 0$ para qualquer x_0 interno.

Prova: defina $v_i(x) = \log(x_i) - \sum_j y_j \log(x_j)$. Então,

$$\begin{aligned} \frac{dv_i(x(t))}{dt} &= \frac{\dot{x}_i}{x_i} - \sum_j y_j \frac{\dot{x}_j}{x_j} \\ &= u(s_i - x, x) - \sum_j y_j u(s_j - x, x) \\ &= u(s_i - y, x) \leq -\epsilon < 0. \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$v_i(\xi(t, x_0)) \rightarrow -\infty, \text{ so } \xi_i(t, x_0) \rightarrow 0.$$

Teorema: se i não é racionalizável, então $\lim_t \xi_i(t, x_0) = 0$ para qualquer x_0 interno.

11. Teoremas

Teorema: Todo x ESS é um estado constante assintoticamente estável de dinâmica do replicador.

(Se os indivíduos podem herdar as estratégias mistas, a recíproca também é verdadeira.)

Teorema: se x é um estado constante assintoticamente estável de dinâmica do replicador, pode ser alcançado a partir de um x_0 interior, então (x, x) é equilíbrio de Nash perfeito.